Los espacios L^p son completos

Objetivos. Demostrar que los espacios L^p con p en $[1, +\infty)$ son completos.

Requisitos. Definición de los espacios L^p, el criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy, el teorema de la convergencia monótona, el lema de Fatou, la convergencia absoluta de series de números complejos.

Se recomienda primero estudiar el caso $p = 1$, es decir, entender una demostración de la completez del espacio $L^1(X, \mu)$. Para $1 < p < +\infty$, la demostración de la completez de $L^p(X, \mu)$ es muy similar, pero en algunos pasos hay que aplicar la desigualdad de Minkowski.

1 Repaso (criterio de completez para espacios métricos, en térmios de sucesiones regulares de Cauchy)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (X, d) es completo;

(b) cualquier sucesión regular de Cauchy en (X, d) converge.

2 Teorema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es completo.*

Dividimos la demostración del Teorema 2 en dos lemas.

3 Lema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Demostración. Pongamos $f_0 \coloneqq 0_X$. Para cada n en $\mathbb{N}$, pongamos

$$u_n(x) \coloneqq f_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Para cada k en $\mathbb{N}$ definimos $v_k \colon X \to [0, +\infty)$,

$$v_k(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{k} |u_n(x)|.$$

Luego definimos $h \colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) \coloneqq \lim_{k\to\infty} v_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Es fácil ver que las funciones u_n, v_k, h son $\mathcal{F}$-medibles. La sucesión de funciones $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente en cada punto, y su límite puntual es h.

Denotemos por φ_p a la función potencial,

$$\varphi_p\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty], \qquad \varphi_p(t) \coloneqq t^p.$$

Aquí ponemos $\varphi_p(+\infty) \coloneqq +\infty$. Sabemos que φ_p es estrictamente creciente y continua en $[0,+\infty]$.

Notamos que $u_k^p = \varphi_p \circ u_k$ y $h^p = \varphi_p \circ h$. Por lo tanto, la sucesión de funciones $(u_k^p)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente en cada punto, y su límite puntual es h^p. Aplicamos el teorema de la convergencia monótona:

$$N_p(h)^p = \int\limits_X h^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X v_k^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k)^p = \Big(\lim_{k\to\infty} N_p(v_k)\Big)^p.$$

Sacamos la p-ésima raíz:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k).$$

Luego usamos la desigualdad de Minkowski:

$$N_p(h) = \lim_{k\to\infty} N_p(v_k) \le \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} N_p(u_n) \le N_p(f_1) + \sum_{n=2}^{k} 2^{-n} < +\infty.$$

Hemos mostrado que $N_p(h) < +\infty$. Definimos $Y \subseteq X$,

$$Y \coloneqq \big\{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\big\}.$$

Entonces

$$X \setminus Y = \big\{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\big\} = \big\{x \in X\colon\ h^p(x) = +\infty\big\},$$

Como h^p es integrable, se sigue que $\mu(X\setminus Y) = 0$.

Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^\infty |u_n(x)|$ converge para cada x en Y. Esto implica que la serie $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ converge para cada x en Y. Pero las sumas parciales de esta serie son las funciones originales f_k:

$$\sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) = f_k(x).$$

Concluimos que para cada x en Y la sucesión de números $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite. Pongamos

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$. $\square$

4 Lema. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $p \in [1, +\infty)$. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ *y sea* $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. *Supongamos que*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Entonces $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ *y* $N_p(f_n - g) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Denotamos por Y al conjunto de los puntos de convergencia:

$$Y := \left\{ x \in X : \ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{g} (x) \right\}.$$

La suposición de la convergencia μ-c.t.p. significa que $\mu(X \setminus Y) = 0$. Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\gamma_f(k) := \sup_{m,n\geq k} N_p(f_m - f_n).$$

Fijamos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad N_p(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k). \tag{1}$$

Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $(|f_n - f_k|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto Y:

$$\int\limits_Y \liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_Y |f_n - f_k|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

En el lado izquierdo tenemos la integral de la función $|g - f_k|^p$. Como $\mu(X \setminus Y) = 0$, podemos pasar a las integrales sobre X.

$$N_p(g - f_k)^p \leq \liminf_{n\to\infty} N_p(f_n - f_k)^p.$$

Usando (1) obtenemos que

$$N_p(g - f_k) \leq \gamma_f(k). \tag{2}$$

Como f es una sucesión de Cauchy, tenemos que $\gamma_f(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que $\gamma_f(m) < 1$. Entonces

$$N_p(g) \leq N_p(g - f_m) + N_p(f_m) \leq \gamma_f(m) + N_p(f_m) < 1 + N_p(f_m) < +\infty.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Ahora (2) implica que $f_k \to g$ en el espacio $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. □

Obviamente, el Teorema 2 se sigue de los Lemas 3 y 4.

5 Teorema. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $p \in [1, +\infty)$. *Entonces* $L^p(X, \mu)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Se sigue del hecho que $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es un espacio seminormado completo. Sin embargo, escribamos una demostración explícita. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X, \mu)$. Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos $f_n \in F_n$. Luego para cada m, n en $\mathbb{N}$ obtenemos

$$N_p(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_p,$$

por lo tanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Por el Teorema 2, existe g en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que $N_p(f_n - g) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X, \mu)$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos $\|F_n - G\|_p = N_p(f_n - g)$, así que $\|F_n - G\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Otras demostraciones

6 Ejercicio (demostrar la completez de $\mathcal{L}^p$ usando series absolutamente convergentes)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Demostrar la completez de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ usando el criterio de completez de espacios normados en términos de la convergencia absoluta de series. Suponer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_p(u_n) < +\infty,$$

y demostrar que existe g en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N_p\left(\sum_{n=1}^{k} u_n - g\right) = 0.$$

Sugerencia: poner $f_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k} u_n$. Juntas y modificar de manera apropiada las demostraciones de los Lemas 3 y 4.

Otro camino es demostrar el siguiente lema (análogo del Lema 3) usando sucesiones de Cauchy en medida.

7 Lema. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. Entonces existen una sucesión escrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*
y una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tales que

$$f_{\nu(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

8 Ejercicio. Demostrar que el Lema 7. Primero, mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida. Luego usar el teorema conocido que en cada sucesión de Cauchy en medida existe una subsucesión que converge μ-c.t.p.