Funciones Lipschitz continuas
(un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

2 de enero de 2023

Plan

Objetivos:

- introducir el concepto de funciones Lipschitz continuas,
- estudiar sus descripciones equialentes,
- estudiar sus propiedades básicas.

Prerrequisitos:

- funciones uniformemente continuas,
- el medidor de continuidad uniforme,
- el teorema del valor medio.

Aplicaciones:

- funciones contractivas y el teorema del punto fijo,
- operadores lineales acotados,
- funciones Hölder continuas (generalización).

Definición de funciones Lipschitz continuas

En este tema suponemos que (X, d_X), (Y, d_Y) son espacios métricos.

Definición de funciones Lipschitz continuas

En este tema suponemos que (X, d_X), (Y, d_Y) son espacios métricos.

Definición

Sea $f\colon X \to Y$ y sea $L \geq 0$. Se dice que f es Lipschitz continua con coeficiente L, si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b).$$

Definición

Sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es Lipschitz continua,
si existe $L \geq 0$ tal que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Notación: el conjunto de las funciones Lipschitz continuas $X \to Y$

$$\operatorname{Lip}(X,Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X \colon \quad \exists L \ge 0 \quad \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \le L\, d_X(a,b) \Big\}.$$

Plan

Criterio de función Lipschitz continua en términos del supremo de un cociente

Ejercicio. Sea $f\colon X \to Y$. Mostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\substack{a,b\in X\\ a\neq b}} \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} < +\infty.$$

Repaso: el indicador de continuidad uniforme de una función

Sea $f\colon X \to Y$. Se define $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$,

$$\omega_f(\eta) := \sup\Big\{d_Y(f(a), f(b))\colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Criterio de función Lipschitz continua en términos de su indicador de continuidad uniforme

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$. Entonces

$$f \in \operatorname{Lip}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists L \geq 0 \qquad \forall \eta > 0 \qquad \omega_f(\eta) \leq L\,\eta.$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Sea $\eta > 0$.

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Sea $\eta > 0$.

Si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \leq \eta$, entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \leq L\, \eta.$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Sea $\eta > 0$.

Si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \leq \eta$, entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \leq L\, \eta.$$

Hemos mostrado que $L\, \eta$ es una cota superior del conjunto

$$\Big\{ d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \leq \eta \Big\}.$$

Demostración, $\Longrightarrow$

Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Sea $\eta > 0$.

Si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \leq \eta$, entonces

$$d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b) \leq L\, \eta.$$

Hemos mostrado que $L\,\eta$ es una cota superior del conjunto

$$\Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \leq \eta\Big\}.$$

Por lo tanto, $\omega_f(\eta) \leq L\,\eta$.

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p, q) > 0$.

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p, q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p, q)$. Entonces

$$(p, q) \in \left\{(a, b) \in X^2 : \quad d_X(a, b) \le \eta\right\}.$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 \colon \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p, q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p, q)$. Entonces

$$(p, q) \in \Big\{(a, b) \in X^2 \colon \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q))$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p, q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p, q)$. Entonces

$$(p, q) \in \Big\{(a, b) \in X^2 : \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) : \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \le$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 \colon \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \le \sup_{\substack{a,b \in X \\ d_X(a,b) \le d_X(p,q)+\varepsilon}} d_Y(f(a), f(b))$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 \colon \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \;\le\; \sup_{\substack{a,b \in X \\ d_X(a,b) \le d_X(p,q) + \varepsilon}} d_Y(f(a), f(b)) \;=$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 : \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) : \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \;\le\; \sup_{\substack{a,b \in X \\ d_X(a,b) \le d_X(p,q)+\varepsilon}} d_Y(f(a), f(b)) \;=\; \omega_f(\eta)$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 \colon \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \;\le\; \sup_{\substack{a,b \in X \\ d_X(a,b) \le d_X(p,q)+\varepsilon}} d_Y(f(a), f(b)) \;=\; \omega_f(\eta) \;\le$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 : \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p),f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a),f(b)) : \quad a,b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p),f(q)) \;\le\; \sup_{\substack{a,b\in X\\ d_X(a,b)\le d_X(p,q)+\varepsilon}} d_Y(f(a),f(b)) \;=\; \omega_f(\eta) \;\le\; \;\le L\,\eta$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\,\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2 \colon \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \le \ \sup_{\substack{a,b\in X\\ d_X(a,b)\le d_X(p,q)+\varepsilon}} d_Y(f(a), f(b)) \ = \ \omega_f(\eta) \ \le \ \ \le L\,\eta \ =$$

Demostración, $\Longleftarrow$, inicio

Supongamos que $L > 0$ y $\omega_f(\eta) \le L\eta$ para cada $\eta > 0$.

Sean p, q en X. Consideremos primero el caso $d_X(p,q) > 0$.

Pongamos $\eta := d_X(p,q)$. Entonces

$$(p,q) \in \Big\{(a,b) \in X^2\colon \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p),f(q)) \in \Big\{d_Y(f(a),f(b))\colon \quad a,b \in X, \quad d_X(a,b) \le \eta\Big\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p),f(q)) \;\le\; \sup_{\substack{a,b\in X\\ d_X(a,b)\le d_X(p,q)+\varepsilon}} d_Y(f(a),f(b)) \;=\; \omega_f(\eta) \;\le\; \le L\eta \;=\; L\, d_X(p,q).$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q)=0$, para cada $\varepsilon>0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta \coloneqq d_X(p,q)+\varepsilon.$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q)=0$, para cada $\varepsilon>0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q)+\varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q)\in\{(a,b)\in X^2\colon\ d_X(a,b)\le\eta\}.$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 : \ d_X(a,b) \le \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q))$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 \colon\ d_X(a,b) \leq \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \leq$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 : \ d_X(a,b) \leq \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \leq \ L\eta$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 \colon \ d_X(a,b) \le \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \le \ L\eta \ =$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 \colon \; d_X(a,b) \le \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \;\le\; L\eta \;=\; L\,(d_X(p,q) + \varepsilon).$$

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 \colon\ d_X(a,b) \le \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \ \le\ L\eta \ =\ L(d_X(p,q) + \varepsilon).$$

Pasamos al límite cuando ε tiende a 0.

Demostración, $\Longleftarrow$, final

En el caso $d_X(p,q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con

$$\eta := d_X(p,q) + \varepsilon.$$

Notemos que

$$(p,q) \in \{(a,b) \in X^2 : \; d_X(a,b) \le \eta\}.$$

Luego

$$d_Y(f(p), f(q)) \; \le \; L\eta \; = \; L\,(d_X(p,q) + \varepsilon).$$

Pasamos al límite cuando ε tiende a 0. Obtenemos que $d_Y(f(p), f(q)) \le L\, d_X(p,q)$.

Funciones Lipschitz continuas entre los espacios pseudométricos

Ejercicio. Sean X, Y espacios pseudométricos.

Definir $\operatorname{Lip}(X, Y)$ y demostrar análogos de los criterios anteriores.

Las funciones Lipschitz continuas son uniformemente continuas

Corolario

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Entonces

$$\mathrm{Lip}(X, Y) \subseteq C_u(X, Y).$$

Plan

¿Cuándo una función real diferenciable es Lipschitz continua?

Ejercicio.

Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que f es diferenciable en cada punto interior de X.

Demostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{t \in \operatorname{int}(X)} |f'(t)| < +\infty.$$

Ejemplo

Consideremos $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := t^2.$$

Demostrar que $f \in \mathrm{Lip}([-5,5], \mathbb{R})$.

Ejemplo

Consideremos $f \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \sqrt{t}.$$

Demostrar que f no es Lipschitz continua.

Ejemplo

Consideremos $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \sqrt{t}.$$

Demostrar que f no es Lipschitz continua.

Primer camino: usar el criterio en términos de $\sup\limits_{t\in(0,+\infty)} |f'(t)|$.

Ejemplo

Consideremos $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \sqrt{t}.$$

Demostrar que f no es Lipschitz continua.

Primer camino: usar el criterio en términos de $\sup\limits_{t\in(0,+\infty)} |f'(t)|$.

Segundo camino: calcular ω_f.

Desigualdad del valor medio para funciones complejas

Recordemos el siguiente resultado.

Si no lo saben, se recomienda demostrarlo.

Desigualdad del valor medio para funciones complejas

Recordemos el siguiente resultado.

Si no lo saben, se recomienda demostrarlo.

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ tal que f es diferenciable en (a, b).

Entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{t \in (a,b)} |f'(t)|.$$

Criterio de función compleja Lipschitz continua en términos del supremo de la derivada

Ejercicio. Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f \in C(X, \mathbb{C})$. Supongamos que f es diferenciable en cada punto de $\operatorname{int}(X)$.

Demostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\operatorname{int}(X)} |f'| < +\infty.$$

Plan

$\mathrm{Lip}(X)$ es un espacio vectorial

Consideremos el caso particular $Y := \mathbb{C}$.

$\mathrm{Lip}(X)$ es un espacio vectorial

Consideremos el caso particular $Y \coloneqq \mathbb{C}$.

Usamos la notación

$$\mathrm{Lip}(X) \coloneqq \mathrm{Lip}(X, \mathbb{C}).$$

$\mathrm{Lip}(X)$ es un espacio vectorial

Consideremos el caso particular $Y \coloneqq \mathbb{C}$.

Usamos la notación

$$\mathrm{Lip}(X) \coloneqq \mathrm{Lip}(X, \mathbb{C}).$$

Ejercicio. Sea (X, d_X) un espacio métrico.

Demostrar que $\mathrm{Lip}(X)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial complejo $C_u(X)$.

La seminorma canónica y la norma canónica en $\mathrm{Lip}(X)$

Sea (X, d_X) un espacio métrico.

La seminorma canónica y la norma canónica en Lip(X)

Sea (X, d_X) un espacio métrico.

Definimos $N_{\mathrm{Lip}} \colon \mathrm{Lip}(X) \to [0, +\infty)$,

$$N_{\mathrm{Lip}}(f) := \sup_{\substack{a,b \in X \\ a \neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{d_X(a, b)}.$$

La seminorma canónica y la norma canónica en $\mathrm{Lip}(X)$

Sea (X, d_X) un espacio métrico.

Definimos $N_{\mathrm{Lip}}\colon\ \mathrm{Lip}(X) \to [0, +\infty)$,

$$N_{\mathrm{Lip}}(f) := \sup_{\substack{a,b \in X \\ a \neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{d_X(a, b)}.$$

Se define $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ en $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{C})$,

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := N_{\mathrm{Lip}}(f) + \|f\|_{\sup}.$$

La seminorma canónica y la norma canónica en $\mathrm{Lip}(X)$

Sea (X, d_X) un espacio métrico.

Definimos $N_{\mathrm{Lip}}\colon\ \mathrm{Lip}(X) \to [0, +\infty)$,

$$N_{\mathrm{Lip}}(f) := \sup_{\substack{a,b\in X\\ a\neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{d_X(a, b)}.$$

Se define $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ en $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{C})$,

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := N_{\mathrm{Lip}}(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Demostrar que N_{Lip} es una seminorma y $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es una norma.

Lip(X) es un espacio de Banach

Ejercicio. Sea (X, d_X) un espacio métrico.

Demostrar que $\mathrm{Lip}(X)$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es un espacio de Banach.