Funciones Lipschitz continuas y conjuntos totalmente acotados (un tema de análisis)

José Alberto Guzmán Vega, Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

1 de agosto de 2024

Objetivo

Mostrar que si $f\colon X \to Y$ es una función Lipschitz continua
y $A \subseteq X$ es totalmente acotado,
entonces $f[A]$ también es totalmente acotado.

Repaso: funciones Lipschitz continuas

Sean $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos.

Por brevedad, escribimos simplemente X, Y.

$$\mathrm{Lip}(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X :$$

Repaso: funciones Lipschitz continuas

Sean $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos.

Por brevedad, escribimos simplemente X, Y.

$$\operatorname{Lip}(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X\colon \quad \exists \gamma \in [0, +\infty) \quad \forall a, b \in X \quad \rho(f(a), f(b)) \le \gamma\, d(a, b) \Big\}.$$

Repaso: funciones Lipschitz continuas

Sean $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos.

Por brevedad, escribimos simplemente X, Y.

$$\operatorname{Lip}(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X\colon \quad \exists \gamma \in [0, +\infty) \quad \forall a, b \in X \quad \rho(f(a), f(b)) \le \gamma\, d(a, b) \Big\}.$$

Dado γ en $[0, +\infty)$,

$$\operatorname{Lip}_\gamma(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X\colon \quad \forall a, b \in X \quad \rho(f(a), f(b)) \le \gamma\, d(a, b) \Big\}.$$

Repaso: funciones Lipschitz continuas

Sean $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos.

Por brevedad, escribimos simplemente X, Y.

$$\operatorname{Lip}(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X \colon \quad \exists \gamma \in [0, +\infty) \quad \forall a, b \in X \quad \rho(f(a), f(b)) \le \gamma\, d(a, b) \Big\}.$$

Dado γ en $[0, +\infty)$,

$$\operatorname{Lip}_\gamma(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X \colon \quad \forall a, b \in X \quad \rho(f(a), f(b)) \le \gamma\, d(a, b) \Big\}.$$

Obviamente,

$$\operatorname{Lip}(X, Y) = \bigcup_{\gamma \in [0, +\infty)} \operatorname{Lip}_\gamma(X, Y).$$

Repaso: la distancia de un punto a un conjunto

Sean (X, d) un espacio métrico, $\quad P \subseteq X, \quad x \in X$.

$$D_P(x) := \inf \Big\{ d(x, p) \colon \; p \in P \Big\}.$$

Repaso: vecindades uniformes de un conjunto

Sean (X, d) un espacio métrico, $\quad P \subseteq X, \quad \varepsilon > 0.$

$$V(P, \varepsilon) := \Big\{ x \in X\colon\ D_P(x) < \varepsilon \Big\}.$$

Repaso: conjuntos totalmente acotados

Sean (X, d) un espacio métrico, $\quad A \subseteq X$.

Repaso: conjuntos totalmente acotados

Sean (X, d) un espacio métrico, $\quad A \subseteq X$.

Hemos probado el siguiente criterio (algunos autores lo aceptan como definición).

Repaso: conjuntos totalmente acotados

Sean (X, d) un espacio métrico, $\quad A \subseteq X$.

Hemos probado el siguiente criterio (algunos autores lo aceptan como definición).

A es totalmente acotado $\quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \subseteq A \quad \Big(R \text{ es finito} \quad \wedge \quad A \subseteq V(R, \varepsilon)\Big).$

La distancia hasta un conjunto y una función Lipschitz continua

Proposición

Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos,
$\gamma \in [0, +\infty)$, $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$,
$P \subseteq X$, $q \in X$.

Entonces,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq \gamma D_P(q).$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q))$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq \rho(f(x), f(q))$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq \rho(f(x), f(q)) \leq$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq \rho(f(x), f(q)) \leq \gamma\, d(x, q).$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq \rho(f(x), f(q)) \leq \gamma\, d(x, q).$$

Luego

$$d(x, q) \geq \frac{1}{\gamma} D_{f[P]}(f(q)).$$

Demostración

Caso $\gamma = 0$: ejercicio.

Consideremos el caso $\gamma \in (0, +\infty)$. Para cada x en P,

$$D_{f[P]}(f(q)) \leq \rho(f(x), f(q)) \leq \gamma\, d(x, q).$$

Luego

$$d(x, q) \geq \frac{1}{\gamma} D_{f[P]}(f(q)).$$

Como x es un elemento arbitrario de P,

$$D_P(q) \geq \frac{1}{\gamma} D_{f[P]}(f(q)).$$

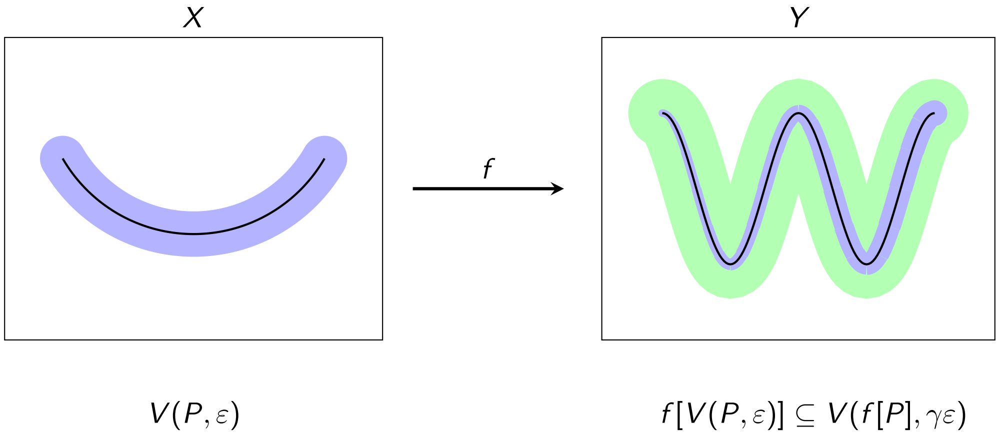
La vecindad uniforme de un conjunto y una función Lipschitz continua

Proposición

Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos,
$\gamma \in [0, +\infty)$, $\quad f \in \operatorname{Lip}_\gamma(X, Y)$,
$P \subseteq X$, $\quad \varepsilon \in (0, +\infty)$.

Entonces,

$$f[V(P, \varepsilon)] \subseteq V(f[P], \gamma\varepsilon).$$


X
Y
f
$V(P, \varepsilon)$
$f[V(P, \varepsilon)] \subseteq V(f[P], \gamma\varepsilon)$

Demostración

Sea $y \in f[V(P, \varepsilon)]$.

Demostración

Sea $y \in f[V(P, \varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P, \varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Demostración

Sea $y \in f[V(P, \varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P, \varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Como $D_P(x) < \varepsilon$,

$$D_{f[P]}(f(x))$$

Demostración

Sea $y \in f[V(P, \varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P, \varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Como $D_P(x) < \varepsilon$,

$$D_{f[P]}(f(x)) \leq$$

Demostración

Sea $y \in f[V(P,\varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P,\varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Como $D_P(x) < \varepsilon$,

$$D_{f[P]}(f(x)) \leq \gamma\, D_P(x)$$

Demostración

Sea $y \in f[V(P,\varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P,\varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Como $D_P(x) < \varepsilon$,

$$D_{f[P]}(f(x)) \leq \gamma\, D_P(x) <$$

Demostración

Sea $y \in f[V(P, \varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P, \varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Como $D_P(x) < \varepsilon$,

$$D_{f[P]}(f(x)) \leq \gamma\, D_P(x) < \gamma\, \varepsilon.$$

Demostración

Sea $y \in f[V(P, \varepsilon)]$.

Elegimos x en $V(P, \varepsilon)$ tal que $y = f(x)$.

Como $D_P(x) < \varepsilon$,

$$D_{f[P]}(f(x)) \leq \gamma\, D_P(x) < \gamma\, \varepsilon.$$

Hemos mostrado que $y \in V(f[P], \gamma\varepsilon)$.

La imagen de un conjunto totalmente acotado bajo una función Lipschitz continua

Proposición

Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos,
$f \in \mathrm{Lip}(X, Y)$,
$A \subseteq X$ tal que A es totalmente acotado.

Entonces, $f[A]$ es totalmente acotado.

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A]$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq f[V(R, \delta)]$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq f[V(R, \delta)] \subseteq$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq f[V(R, \delta)] \subseteq V(f[R], \gamma\delta)$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0,+\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X,Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0,+\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma+1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R,\delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq f[V(R,\delta)] \subseteq V(f[R],\gamma\delta) \subseteq$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq f[V(R, \delta)] \subseteq V(f[R], \gamma\delta) \subseteq V(f[R], \varepsilon).$$

Demostración

Supongamos que $\gamma \in [0, +\infty)$ y $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Encontramos $R \subseteq A$ tal que R es finito y

$$A \subseteq V(R, \delta).$$

Entonces,

$$f[A] \subseteq f[V(R, \delta)] \subseteq V(f[R], \gamma\delta) \subseteq V(f[R], \varepsilon).$$

$f[R]$ es finito y es una ε-red para $f[A]$.

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \operatorname{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\quad \delta :=$

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \operatorname{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Por lo tanto:

$$\rho(y, f(a_j)) =$$

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Por lo tanto:

$$\rho(y, f(a_j)) = \rho(f(x), f(a_j)) \leq$$

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Por lo tanto:

$$\rho(y, f(a_j)) = \rho(f(x), f(a_j)) \leq \gamma d(x, a_j) <$$

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Por lo tanto:

$$\rho(y, f(a_j)) = \rho(f(x), f(a_j)) \leq \gamma d(x, a_j) < \gamma\delta <$$

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Por lo tanto:

$$\rho(y, f(a_j)) = \rho(f(x), f(a_j)) \leq \gamma d(x, a_j) < \gamma\delta < \varepsilon.$$

Versión más directa de la demostración

Sea $\gamma \in [0, +\infty)$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\gamma(X, Y)$.

Sea $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{\gamma + 1}$.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subseteq V(\{a_1, \ldots, a_m\}, \delta)$.

Sea $y \in f[A]$. Encontramos x en A tal que $y = f(x)$.

Luego existe j en $\{1, \ldots, m\}$ tal que $d(x, a_j) < \delta$.

Por lo tanto:

$$\rho(y, f(a_j)) = \rho(f(x), f(a_j)) \leq \gamma d(x, a_j) < \gamma\delta < \varepsilon.$$

En conclusión, $f[A] \subseteq V(\{f(a_1), \ldots, f(a_m)\}, \varepsilon)$.

Otra demostración: usando sucesiones de Cauchy

Ejercicio.

Recuerde el criterio de espacios totalmente acotados en términos de sucesiones de Cauchy.

Utilice este criterio para demostrar la proposición sobre $f[A]$.