Funciones Lipschitz continuas y funciones Hölder continuas

Objetivos. Definir los conceptos de funciones Lipschitz continuas y Hölder continuas, estudiar sus propiedades básicas.

Prerrequisitos. Funciones uniformemente continuas, el indicador de continuidad uniforme, la definición de la derivada, el teorema del valor medio.

1 Definición (función Lipschitz continua)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es *Lipschitz continua*, si existe un número $L \ge 0$ tal que para cada a, b en X

$$d_Y(f(a), f(b)) \le L\, d_X(a, b).$$

Denotamos por $\operatorname{Lip}(X, Y)$ el conjunto de las funciones Lipschitz continuas $X \to Y$. En otras palabras,

$$\operatorname{Lip}(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X\colon \quad \exists L \ge 0 \quad \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \le L\, d_X(a, b) \Big\}.$$

2 Ejercicio (criterio de función Lipschitz continua en términos del supremo de un cociente)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Mostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\substack{a,b \in X \\ a \ne b}} \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} < +\infty.$$

Recordemos que el indicador de continuidad uniforme de f es la función $\omega_f\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ definida mediante la siguiente regla:

$$\omega_f(\eta) \coloneqq \sup\Big\{ d_Y(f(a), f(b))\colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta \Big\}.$$

3 Proposición (criterio de función Lipschitz continua en términos de su indicador de continuidad uniforme)**.** *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es Lipschitz continua si, y solo sí, existe $L \ge 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le L\eta$ para cada $\eta > 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que f es Lipschitz continua con coeficiente L. Si $a, b \in X$ y $d_X(a, b) \le \eta$, entonces $d_Y(f(a), f(b)) \le L\eta$. Hemos mostrado que $L\eta$ es una cota superior del conjunto

$$\Big\{ d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta \Big\}.$$

Por lo tanto, $\omega_f(\eta) \le L\eta$.

$\Leftarrow$. Supongamos que existe $L \ge 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le L\eta$ para cada $\eta > 0$. Dados p, q en X con $d_X(p, q) > 0$, pongamos $\eta = d_X(p, q)$ y obtenemos

$$(p, q) \in \big\{ (a, b) \in X^2 \colon \quad d_X(a, b) \le \eta \big\}.$$

Por eso

$$d_Y(f(p), f(q)) \in \Big\{ d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta \Big\},$$

y

$$\begin{aligned} d_Y(f(p), f(q)) &\le \sup \Big\{ d_Y(f(a), f(b)) \colon \quad a, b \in X, \quad d_X(a, b) \le \eta \Big\} \\ &= \omega_f(\eta) \le L\eta = L d_X(p, q). \end{aligned}$$

En el caso $d_X(p, q) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ hacemos un razonamiento similar con $\eta = d_X(p, q) + \varepsilon$. Obtenemos

$$d_Y(f(p), f(q)) \le L(d_X(p, q) + \varepsilon),$$

y pasamos al límite cuando ε tiende a 0. Este razonamiento es válido también para espacios pseudométricos. $\square$

4 Corolario. *Sean* (X, d_X), (Y, d_Y) *espacios métricos. Entonces* $\operatorname{Lip}(X, Y) \subseteq C_u(X, Y)$.

5 Ejercicio. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Demostrar que $\operatorname{Lip}(X, \mathbb{C})$ es un subespacio del espacio vectorial $C_u(X, \mathbb{C})$.

6 Ejercicio (la seminorma canónica y la norma canónica en el espacio de funciones Lipschitz continuas)**.** Sea (X, d_X) un espacio métrico. Se define $N_{\mathrm{Lip}} \colon \operatorname{Lip}(X, \mathbb{C}) \to [0, +\infty)$,

$$N_{\mathrm{Lip}}(f) \coloneqq \sup_{\substack{a,b \in X \\ a \ne b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{d_X(a, b)}.$$

Demostrar que N_{Lip} es una seminorma. Se define $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ en $\operatorname{Lip}(X, \mathbb{C})$,

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \coloneqq N_{\mathrm{Lip}}(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Demostar que $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es una norma.

7 Ejercicio. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Demostrar que $\operatorname{Lip}(X, \mathbb{C})$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es un espacio de Banach.

8 Ejercicio. Sea X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en cada punto de X. Demostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_X |f'| < +\infty.$$

El siguiente ejercicio es más complicado que el anterior y requiere el "teorema de Lagrange" ("la desigualdad del valor medio") para las funciones complejas.

9 Ejercicio. Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X y diferenciable en cada punto de $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que

$$f \in \operatorname{Lip}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\operatorname{int}(X)} |f'| < +\infty.$$

10 Definición (función α-Hölder continua)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos, sea $\alpha > 0$ y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es *Hölder continua continua con exponente* α o α*-Hölder continua*, si existe un número $L \ge 0$ tal que para cada a, b en X

$$d_Y(f(a), f(b)) \le L\,(d_X(a, b))^\alpha.$$

Denotamos por $\operatorname{Höl}^\alpha(X, Y)$ el conjunto de las funciones α-Hölder continuas $X \to Y$. En otras palabras,

$$\operatorname{Höl}^\alpha(X, Y) \coloneqq \Big\{ f \in Y^X\colon \quad \exists L \ge 0 \quad \forall a, b \in X \quad d_Y(f(a), f(b)) \le L\,(d_X(a, b))^\alpha \Big\}.$$

11 Ejercicio. Para las funciones α-Hölder continuas demostrar análogos de las propiedades 2, 3, 4, 5, 6, 7 que hemos enunciado para las funciones Lipschitz continuas.

12 Ejemplo. Consideramos $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \sqrt{x}$. Demostrar que $f \in \operatorname{Höl}^{1/2}([0, 1], \mathbb{R})$, pero $f \notin \operatorname{Lip}([0, 1], \mathbb{R})$.