La integral de Lebesgue de functiones complejas (un tema del curso "Análisis Real")

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

11 de junio de 2021

Plan

Plan

Objetivos de esta clase:

- definir la integral de Lebesgue de funciones complejas;
- estudiar sus propiedades elementales.

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
-

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
-

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
-

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Etapas de la definición de la integral de Lebesgue

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)),$
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]),$
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty,$
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$

En esta clase explicamos rápidamente la etapa 4.

Prerrequisitos:

- la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles, la denotamos por $\int^{(2)}$;
- la propiedad monótona de la integral $\int^{(2)}$;
- la integral de Lebesgue de funciones reales medibles, la denotamos por $\int^{(3)}$;
- las propiedades lineales de la integral $\int^{(3)}$;
- la propiedad monótona de la integral $\int^{(3)}$;
- la parte real e imaginaria de un número real;
- el valor absoluto de un número complejo.

Plan

La parte real e imaginaria de números complejos, repaso

Para z en $\mathbb{C}$, si $z = x + \mathrm{i}\, y$ con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathrm{Re}(z) =$$

La parte real e imaginaria de números complejos, repaso

Para z en $\mathbb{C}$, si $z = x + \mathrm{i}\, y$ con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathrm{Re}(z) = x,$$

La parte real e imaginaria de números complejos, repaso

Para z en $\mathbb{C}$, si $z = x + \mathrm{i}\, y$ con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{Re}(z) = x, \qquad \operatorname{Im}(z) =$$

La parte real e imaginaria de números complejos, repaso

Para z en $\mathbb{C}$, si $z = x + \mathrm{i}\, y$ con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{Re}(z) = x, \qquad \operatorname{Im}(z) = y.$$

La parte real e imaginaria de números complejos, repaso

Para z en $\mathbb{C}$, si $z = x + \mathrm{i}\, y$ con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathrm{Re}(z) = x, \qquad \mathrm{Im}(z) = y.$$

Las funciones $\mathrm{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ son continuas.

Cotas para $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$, entonces $\quad |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cotas para $|z|$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathrm{i}\,y$, entonces $\quad |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathrm{i}\,y$. Entonces

$$|z| \le |x| + |y|, \qquad |x| \le |z|, \qquad |y| \le |z|.$$

Cotas para $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$, entonces $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$. Entonces

$$|z| \le |x| + |y|, \qquad |x| \le |z|, \qquad |y| \le |z|.$$

Demostración:

$$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$

Por otro lado, usamos la propiedad subaditiva de abs en $\mathbb{C}$:

$$|z| = |x + \mathrm{i}\, y| \le |x| + |\mathrm{i}\, y| = |x| + |y|.$$

La parte real y la parte imaginaria de una función

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Definimos

$$\operatorname{Re}(f)\colon X \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(f)\colon X \to \mathbb{R}, \quad |f|\colon X \to [0,+\infty),$$

$$\operatorname{Re}(f) := \operatorname{Re}\circ f, \qquad \operatorname{Im}(f) := \operatorname{Im}\circ f, \qquad |f| := \operatorname{abs}\circ f.$$

En otras palabras, para cada x en X,

$$\operatorname{Re}(f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)), \qquad \operatorname{Im}(f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)), \qquad |f|(x) := |f(x)|.$$

Cotas para $|\operatorname{Re}(f)|$, $|\operatorname{Im}(f)|$ y $|f|$

Ejercicios. Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Demostrar que

$$|\operatorname{Re}(f)| \le |f|, \qquad |\operatorname{Im}(f)| \le |f|, \qquad |f| \le |\operatorname{Re}(f)| + |\operatorname{Im}(f)|.$$

La medibilidad de la parte real e imaginaria de una función medible

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Re}(f) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}).$$

Ejercicio: recordar una demostración.

Plan

Notación para la integral de funciones medibles positivas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Notación para la integral de funciones medibles positivas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Dada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, denotamos su integral de Lebesgue por $\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$.

Notación para la integral de funciones medibles positivas

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Dada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, denotamos su integral de Lebesgue por $\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu$.

Pongamos

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) \colon \int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Notación para la integral de funciones medibles reales

$$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{R})\colon\ \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Dada f en $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{R})$, denotamos su integral de Lebesgue por $\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$.

Relaciones entre la integrabilidad de $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ y $|f|$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\int_X^{(2)} |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X^{(2)} |\mathrm{Re}(f)| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X^{(2)} |\mathrm{Im}(f)| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Relaciones entre la integrabilidad de $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ y $|f|$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X^{(2)} |\operatorname{Re}(f)| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X^{(2)} |\operatorname{Im}(f)| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Demostración. Usar las fórmulas

$$|f| \le |\operatorname{Re}(f)| + |\operatorname{Im}(f)|, \qquad |\operatorname{Re}(f)| \le |f|, \qquad |\operatorname{Im}(f)| \le |f|,$$

la propiedad monótona de $\int^{(2)}$ y la propiedad aditiva de $\int^{(2)}$.

Funciones complejas integrables, la integral para funciones complejas

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \int_X^{(2)} |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Funciones complejas integrables, la integral para funciones complejas

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \colon \quad \int_X^{(2)} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Para cada f en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$,

$$\int_X^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu :== \int_X^{(3)} \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_X^{(3)} \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ si, y solo si,

$$\mathrm{Re}(f) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}).$$

$\int^{(4)} = \int^{(3)}$ para funciones reales medibles integrables

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_X^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

$\int^{(4)} = \int^{(3)}$ para funciones reales medibles integrables

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Entonces

$$\int_X^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(3)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración.

$$\operatorname{Re}(f) = f, \qquad \operatorname{Im}(f) = 0_X.$$

Proposición (un subespacio de un espacio de medida, repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $A \in \mathcal{F}$. Definimos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} : \; B \subseteq A\}, \qquad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Proposición (un subespacio de un espacio de medida, repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $A \in \mathcal{F}$. Definimos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} \colon\ B \subseteq A\}, \qquad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Proposición (sobre la medibilidad de la función restringida, repaso)

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$, $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H}).$$

Integración de funciones complejas sobre un subconjunto

Definición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(4)} f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Integración de funciones complejas sobre un subconjunto

Definición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(4)} f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$\int_A^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(3)} \mathrm{Re}(f) \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_A^{(3)} \mathrm{Im}(f) \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int_A^{(4)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(4)} \mathbb{1}_A \, f \, \mathrm{d}\mu.$$

Plan

La parte real, la parte imaginaria y operaciones con números complejos

Ejercicio. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Expresar

$$\operatorname{Re}(z+w), \qquad \operatorname{Im}(z+w), \qquad \operatorname{Re}(zw), \qquad \operatorname{Im}(zw)$$

en términos de $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(w)$, $\operatorname{Im}(w)$.

La parte real, la parte imaginaria y operaciones con números complejos

Ejercicio. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Expresar

$$\operatorname{Re}(z+w), \qquad \operatorname{Im}(z+w), \qquad \operatorname{Re}(zw), \qquad \operatorname{Im}(zw)$$

en términos de $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(w)$, $\operatorname{Im}(w)$.

Ejercicio. Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$. Expresar

$$\operatorname{Re}(f+g), \qquad \operatorname{Im}(f+g), \qquad \operatorname{Re}(fg), \qquad \operatorname{Im}(fg)$$

en términos de $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $\operatorname{Re}(g)$, $\operatorname{Im}(g)$.

Las propiedades lineales de $\int^{(4)}$

Usando los ejercicios anteriores, demostrar las siguientes propiedades.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_X (\alpha f)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Plan

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$.

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := e^{ix}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) =$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := e^{ix}$. Entonces

$$\operatorname{Re}(f)(x) = \cos(x),$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(f)(x) =$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := e^{i\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{sen}(x),$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := e^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \operatorname{sen}(x), \quad \int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu =$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{sen}(x), \quad \int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := e^{ix}$. Entonces

$$\operatorname{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{sen}(x), \quad \int_X \operatorname{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \quad \int_X \operatorname{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu =$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\operatorname{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{sen}(x), \quad \int_X \operatorname{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \quad \int_X \operatorname{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{sen}(x), \quad \int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \quad \int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu =$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{sen}(x), \quad \int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \quad \int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 1 + \mathrm{i},$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \qquad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{sen}(x), \qquad \int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \qquad \int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 1 + \mathrm{i}, \qquad \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu =$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}$. Entonces

$$\operatorname{Re}(f)(x) = \cos(x), \quad \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{sen}(x), \quad \int_X \operatorname{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \quad \int_X \operatorname{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 1 + \mathrm{i}, \qquad \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo

$X = [0, \pi/2]$ con la medida de Lebesgue, $f(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$. Entonces

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \cos(x), \qquad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{sen}(x), \qquad \int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1, \qquad \int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 1 + \mathrm{i}, \qquad \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Notamos que en este ejemplo

$$\underbrace{\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right|}_{\sqrt{2}} < \underbrace{\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu}_{\frac{\pi}{2}} < \underbrace{\left|\int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu\right|}_{2}.$$

Una rotación que convierte un número complejo en un número positivo

Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Construir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\alpha| = 1, \qquad \alpha z = |z|.$$

Una rotación que convierte un número complejo en un número positivo

Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Construir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\alpha| = 1, \qquad \alpha z = |z|.$$

El caso $z = 0$ es trivial. En este caso sirve, por ejemplo, $\alpha = 1$.

Una rotación que convierte un número complejo en un número positivo

Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Construir $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\alpha| = 1, \qquad \alpha z = |z|.$$

El caso $z = 0$ es trivial. En este caso sirve, por ejemplo, $\alpha = 1$.

En el caso $z \neq 0$, hay al menos tres caminos.

- Construir α en términos de $\overline{z}$ y $|z|$,
- Si $z = x + \mathrm{i}\, y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, expresar α a través de x, y.
- Si $z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ con $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, expresar α a través de ρ, θ.

Comparación del abs($\int f$) con $\int$ abs(f)

Teorema

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Un camino falso de demostración

Es correcta la siguiente cota:

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \left| \int_X \mathrm{Re}(f) \,\mathrm{d}\mu \right| + \left| \int_X \mathrm{Im}(f) \,\mathrm{d}\mu \right|,$$

pero no sirve para demostar el teorema.

Un camino falso de demostración

Es correcta la siguiente cota:

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \left|\int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu\right|,$$

pero no sirve para demostar el teorema.

En efecto, ya vimos un ejemplo con

$$\left|\int_X \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_X \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu\right| > \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$.

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u =$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f)$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \leq$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \leq |\operatorname{Re}(\alpha f)|$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f|$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| =$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \leq |\operatorname{Re}(\alpha f)| \leq |\alpha f| = |\alpha|\,|f|$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| =$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \mathrm{Re}(\alpha f)$.

$$u = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| =$$

Demostración

$$z := \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \mathrm{Re}(\alpha f)$.

$$u = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = |z|$$

Demostración

$$z := \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \mathrm{Re}(\alpha f)$.

$$u = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = |z| =$$

Demostración

$$z := \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \leq |\operatorname{Re}(\alpha f)| \leq |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = |z| = \alpha z \overset{\alpha z \ge 0}{=\!=\!=\!=}$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \leq |\operatorname{Re}(\alpha f)| \leq |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = |z| = \alpha z \xlongequal{\alpha z \geq 0} \operatorname{Re}(\alpha z)$$

Demostración

$$z := \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \mathrm{Re}(\alpha f)$.

$$u = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \xlongequal{\alpha z \ge 0} \mathrm{Re}(\alpha z) =$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \overset{\alpha z \ge 0}{=\!=\!=\!=} \operatorname{Re}(\alpha z) = \operatorname{Re}\left(\alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu\right)$$

Demostración

$$z := \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \mathrm{Re}(\alpha f)$.

$$u = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \xlongequal{\alpha z \ge 0} \mathrm{Re}(\alpha z) = \mathrm{Re}\left(\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu\right)$$

$$=$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \overset{\alpha z \ge 0}{=\!=\!=\!=} \operatorname{Re}(\alpha z) = \operatorname{Re}\left(\alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_X \alpha f \, \mathrm{d}\mu\right)$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \overset{\alpha z \ge 0}{=\!=\!=} \operatorname{Re}(\alpha z) = \operatorname{Re}\left(\alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_X \alpha f \, \mathrm{d}\mu\right) =$$

Demostración

$$z := \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \xlongequal{\alpha z \ge 0} \operatorname{Re}(\alpha z) = \operatorname{Re}\left(\alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_X u \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \mathrm{Re}(\alpha f)$.

$$u = \mathrm{Re}(\alpha f) \le |\mathrm{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = |z| = \alpha z \overset{\alpha z \ge 0}{=\!=\!=\!=} \mathrm{Re}(\alpha z) = \mathrm{Re}\left(\alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_X \alpha f \, \mathrm{d}\mu \right) = \int_X u \, \mathrm{d}\mu \le$$

Demostración

$$z := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Encontramos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(\alpha f)$.

$$u = \operatorname{Re}(\alpha f) \le |\operatorname{Re}(\alpha f)| \le |\alpha f| = |\alpha|\,|f| = |f|.$$

$$\left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| = |z| = \alpha z \overset{\alpha z \ge 0}{=\!=\!=\!=} \operatorname{Re}(\alpha z) = \operatorname{Re}\left(\alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_X \alpha f \, \mathrm{d}\mu\right) = \int_X u \, \mathrm{d}\mu \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$