Los espacios normados L^1 son completos

(un tema de la unidad “Espacios L^p”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

21 de octubre de 2022

Plan

Objetivo:

- demostrar que el espacio $L^1(X, \mu)$ es completo, donde $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Objetivo:

- demostrar que el espacio $L^1(X, \mu)$ es completo,
  donde $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

La demostración de la completez de $L^1(X, \mu)$ es un poco más fácil
que la demostración de la completez de $L^p(X, \mu)$ con p general, $1 \leq p < +\infty$.

Prerrequisitos:

- espacios métricos completos;
- sucesiones regulares de Cauchy;
- la definición del espacio L^1;
- el teorema de la convergencia monótona;
- la propiedad $\int \sum = \sum \int$ para las series de funciones positivas;
- el lema de Fatou.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es cerrado respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es cerrado respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

$0_X \coloneqq$ la función constante cero.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{C}^X$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ es cerrado respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

$0_X \coloneqq$ la función constante cero.

$0_X \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$.

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^1(X, \mu)$

Definimos $N_1 \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_1(f) := \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^1(X, \mu)$

Definimos $N_1 \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_1(f) := \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

N_1 es una seminorma extendida.

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^1(X,\mu)$

Definimos $N_1 \colon \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \to [0,+\infty]$,

$$N_1(f) := \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

N_1 es una seminorma extendida.

$$\mathcal{L}^1(X,\mu) \; := \; \Big\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad N_1(f) < +\infty \Big\}.$$

Repaso: el espacio seminormado $\mathcal{L}^1(X,\mu)$

Definimos $N_1\colon \mathcal{M}(X,\mathcal{F}) \to [0,+\infty]$,

$$N_1(f) := \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

N_1 es una seminorma extendida.

$$\mathcal{L}^1(X,\mu) \;:=\; \Big\{f \in \mathcal{M}(X,\mu)\colon \quad N_1(f) < +\infty\Big\}.$$

$\mathcal{L}^1(X,\mu)$ es un espacio vectorial complejo. La función $N_1|_{\mathcal{L}^1(X,\mu)}$ es una seminorma.

Repaso: las funciones que se anulan casi en todas partes

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Sabemos que

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \;=\; \left\{ f \in \mathcal{L}^1(X,\mu) \colon\; N_1(f) = 0 \right\}.$$

Repaso: las funciones que se anulan casi en todas partes

$$\mathcal{Z}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X,\mu) \colon \quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X \right\}.$$

Sabemos que

$$\mathcal{Z}(X,\mu) \;=\; \left\{ f \in \mathcal{L}^1(X,\mu) \colon\; N_1(f) = 0 \right\}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{Z}(X,\mu)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Repaso: el espacio normado $L^1(X,\mu)$

$$L^1(X,\mu) \coloneqq \mathcal{L}^1(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Repaso: el espacio normado $L^1(X, \mu)$

$$L^1(X, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu)/\mathcal{Z}(X, \mu).$$

Si $g - f \in \mathcal{Z}(X, \mu)$, entonces $N_1(g) = N_1(f)$.

Repaso: el espacio normado $L^1(X,\mu)$

$$L^1(X,\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Si $g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu)$, entonces $N_1(g) = N_1(f)$.

La norma en $L^1(X,\mu)$:

$$\forall F \in L^1(X,\mu) \qquad \forall f \in F \qquad \|F\|_1 = N_1(f).$$

Repaso: el espacio normado $L^1(X,\mu)$

$$L^1(X,\mu) \coloneqq \mathcal{L}^1(X,\mu)/\mathcal{Z}(X,\mu).$$

Si $g - f \in \mathcal{Z}(X,\mu)$, entonces $N_1(g) = N_1(f)$.

La norma en $L^1(X,\mu)$:

$$\forall F \in L^1(X,\mu) \qquad \forall f \in F \qquad \|F\|_1 = N_1(f).$$

En otras palabras,

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(X,\mu) \qquad \|f + \mathcal{Z}(X,\mu)\|_1 = N_1(f).$$

Repaso: $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$ para $f_n \geq 0$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Repaso: $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$ para $f_n \geq 0$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Es un corolario del teorema de la convergencia monótona.

Plan

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Entonces el espacio seminormado $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ es completo.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Entonces el espacio seminormado $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ es completo.

Dividimos la demostración en dos lemas.

Primer lema: regular de Cauchy en $\mathcal{L}^1 \Rightarrow$ converge c.t.p.

Lema 1

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Entonces existe g en $\mathcal{M}(X,\mu)$ tal que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$.

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v \colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} N_1(f_n - f_{n-1})$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \,\mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v \,\mathrm{d}\mu = N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} N_1(f_n - f_{n-1}) \leq$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} N_1(f_n - f_{n-1}) \leq N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n}$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} N_1(f_n - f_{n-1}) \leq N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} <$$

Demostración: la integral de la suma de las diferencias absolutas

Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Por un corolario del teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X v\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}|\,\mathrm{d}\mu.$$

Luego

$$\int_X v\,\mathrm{d}\mu = N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} N_1(f_n - f_{n-1}) \le N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} < +\infty.$$

Demostración: el conjunto malo y el conjunto bueno

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Demostración: el conjunto malo y el conjunto bueno

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Pongamos

$$M := \Big\{x \in X\colon\ v(x) = +\infty\Big\}, \qquad Y := \Big\{x \in X\colon\ v(x) < +\infty\Big\}.$$

Demostración: el conjunto malo y el conjunto bueno

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Pongamos

$$M := \Big\{x \in X\colon\ \ v(x) = +\infty\Big\}, \qquad Y := \Big\{x \in X\colon\ \ v(x) < +\infty\Big\}.$$

Como $\displaystyle\int_X v\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, tenemos que $\mu(M) = 0$.

Demostración: el conjunto malo y el conjunto bueno

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Pongamos

$$M := \Big\{x \in X\colon\ v(x) = +\infty\Big\}, \qquad Y := \Big\{x \in X\colon\ v(x) < +\infty\Big\}.$$

Como $\displaystyle\int_X v\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, tenemos que $\mu(M) = 0$.

Para cada x en Y, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n - f_{n-1}(x))$$

converge absolutamente y por lo tanto converge.

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(f_n(x)-f_{n-1}(x))$$

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(f_n(x)-f_{n-1}(x)) =$$

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = \lim_{m\to\infty} (f_m(x) - f_0(x))$$

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(f_n(x)-f_{n-1}(x)) = \lim_{m\to\infty}(f_m(x)-f_0(x)) =$$

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(f_n(x)-f_{n-1}(x)) = \lim_{m\to\infty}(f_m(x)-f_0(x)) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = \lim_{m\to\infty} (f_m(x) - f_0(x)) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Demostración: la convergencia puntual en el conjunto bueno

Para cada x en Y, existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(f_n(x)-f_{n-1}(x)) = \lim_{m\to\infty}(f_m(x)-f_0(x)) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Definimos $g\colon X\to\mathbb{C}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x\in Y;\\ 0, & x\in M. \end{cases}$$

Entonces $g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Segundo lema: Cauchy + convergencia c.t.p. $\Rightarrow$ convergencia en $\mathcal{L}^1$

Lema 2

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ y sea g en $\mathcal{M}(X,\mu)$ tal que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Entonces $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ y $N_1(f_n - g) \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Demostración del segundo lema, inicio

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión f:

$$\gamma_f(k) := \sup_{m,n \geq k} N_1(f_m - f_n).$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad \int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu = N_1(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Apliquemos el lema de Fatou a la sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $h_n := |f_n - f_k|$.

$$\int_X \left(\liminf_{n \to \infty} |f_n - f_k| \right) \mathrm{d}\mu$$

Demostración del segundo lema, inicio

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión f:

$$\gamma_f(k) := \sup_{m,n\geq k} N_1(f_m - f_n).$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad \int_X |f_n - f_k| \,\mathrm{d}\mu = N_1(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Apliquemos el lema de Fatou a la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $h_n := |f_n - f_k|$.

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\right) \mathrm{d}\mu \leq$$

Demostración del segundo lema, inicio

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión f:

$$\gamma_f(k) := \sup_{m,n\geq k} N_1(f_m - f_n).$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad \int_X |f_n - f_k| \,\mathrm{d}\mu = N_1(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Apliquemos el lema de Fatou a la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $h_n := |f_n - f_k|$.

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f_k| \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración del segundo lema, inicio

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión f:

$$\gamma_f(k) := \sup_{m,n \geq k} N_1(f_m - f_n).$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad \int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu = N_1(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Apliquemos el lema de Fatou a la sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $h_n := |f_n - f_k|$.

$$\int_X \left(\liminf_{n \to \infty} |f_n - f_k| \right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X |f_n - f_k| \, \mathrm{d}\mu \leq$$

Demostración del segundo lema, inicio

Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión f:

$$\gamma_f(k) := \sup_{m,n\geq k} N_1(f_m - f_n).$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad \int_X |f_n - f_k| \,\mathrm{d}\mu = N_1(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Apliquemos el lema de Fatou a la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $h_n := |f_n - f_k|$.

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f_k| \,\mathrm{d}\mu \leq \gamma_f(k).$$

Demostración del segundo lema, continuación

Por el lema de Fatou,

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\right) \mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

Demostración del segundo lema, continuación

Por el lema de Fatou,

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k| \right) \mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

Por la suposición, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración del segundo lema, continuación

Por el lema de Fatou,

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\right) \mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

Por la suposición, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Por eso $|f_n - f_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} |g - f_k|$.

Demostración del segundo lema, continuación

Por el lema de Fatou,
$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\Big)\,\mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

Por la suposición, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Por eso $|f_n - f_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} |g - f_k|$.

Podemos simplificar la integral en el primer término de la desigualdad:

$$\int_X |g - f_k|\,\mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

Demostración del segundo lema, continuación

Por el lema de Fatou,
$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k| \right) \mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

Por la suposición, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Por eso $|f_n - f_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} |g - f_k|$.

Podemos simplificar la integral en el primer término de la desigualdad:

$$\int_X |g - f_k| \,\mathrm{d}\mu \le \gamma_f(k).$$

En otras palabras, $N_1(g - f_k) \le \gamma_f(k)$.

Demostración del segundo lema, final

Hemos mostrado que

$$N_1(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración del segundo lema, final

Hemos mostrado que

$$N_1(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

En particular, esto implica que

$$N_1(g) = N_1(g - f_1 + f_1) \leq N_1(g - f_1) + N_1(f_1) \leq \gamma_f(1) + N_1(f_1) < +\infty.$$

Demostración del segundo lema, final

Hemos mostrado que

$$N_1(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

En particular, esto implica que

$$N_1(g) = N_1(g - f_1 + f_1) \leq N_1(g - f_1) + N_1(f_1) \leq \gamma_f(1) + N_1(f_1) < +\infty.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Demostración del segundo lema, final

Hemos mostrado que

$$N_1(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

En particular, esto implica que

$$N_1(g) = N_1(g - f_1 + f_1) \leq N_1(g - f_1) + N_1(f_1) \leq \gamma_f(1) + N_1(f_1) < +\infty.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Como f es una sucesión de Cauchy, $\gamma_f \to 0$.

Demostración del segundo lema, final

Hemos mostrado que

$$N_1(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

En particular, esto implica que

$$N_1(g) = N_1(g - f_1 + f_1) \leq N_1(g - f_1) + N_1(f_1) \leq \gamma_f(1) + N_1(f_1) < +\infty.$$

Por lo tanto, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Como f es una sucesión de Cauchy, $\gamma_f \to 0$.

Concluimos que $N_1(g - f_k) \to 0$, cuando $k \to \infty$.

Plan

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio normado $L^1(X, \mu)$ es completo.

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio normado $L^1(X, \mu)$ es completo.

Este teorema se sigue fácilmente de la completez de $\mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Escribiremos una demostración.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Entonces para cada m,n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} N_1(f_n - g) = 0$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Entonces para cada m,n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} N_1(f_n - g) = 0$.

Pongamos $G \coloneqq g + \mathcal{Z}(X,\mu)$.

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Entonces para cada m, n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} N_1(f_n - g) = 0$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces $G \in L^1(X,\mu)$

Demostración

Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$.

Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n.

Entonces para cada m,n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$.

Como $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ es completo, existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} N_1(f_n - g) = 0$.

Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces $G \in L^1(X,\mu)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n - G\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_1 = 0.$$

Otra forma de la demostración: trabajar con series

Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ es completo usando el criterio de completez de espacios normados o seminormados en términos de la convergencia de series.

Suponer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_1(u_n) < +\infty.$$

Construir $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N_1\left(\sum_{n=1}^{k} u_n - g\right) = 0.$$

Ejemplo: converge en $\mathcal{L}^1$, pero no converge c.t.p.

Ejercicio. Consideramos $X = [0,1)$ con la medida de Lebesgue μ.

Encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que:

- $N_1(f_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$,
- para cada x en X se tiene que $f_n(x) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo: converge en $\mathcal{L}^1$, pero no converge c.t.p.

Ejercicio. Consideramos $X = [0,1)$ con la medida de Lebesgue μ.

Encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que:

- $N_1(f_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$,
- para cada x en X se tiene que $f_n(x) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$.

Mostrar que:

- $N_1(f_n - 0_X) \to 0$, cuando $n \to \infty$,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$,
- no existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Ejemplo: converge en $\mathcal{L}^1$, pero no converge c.t.p.

Ejercicio. Consideramos $X = [0, 1)$ con la medida de Lebesgue μ.

Encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ tal que:

- $N_1(f_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$,
- para cada x en X se tiene que $f_n(x) \not\to 0$ cuando $n \to \infty$.

Mostrar que:

- $N_1(f_n - 0_X) \to 0$, cuando $n \to \infty$,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X, \mu)$,
- no existe g en $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Conclusión: en el Lema 1 no es suficiente suponer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de Cauchy.