Completez de los espacios L^1 de funciones Lebesgue integrables

Objetivos. Demostrar que los espacios $L^1(X, \mu)$ son completos.

Requisitos. Sucesiones de Cauchy, sucesiones regulares de Cauchy, espacios métricos completos, criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy, criterio de completitez de espacios normados en términos de la convergencia de series, teorema de convergencia monótona, lema de Fatou, teorema de convergencia dominada, definición de los espacios L^p.

Sabemos que $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ es un espacio seminormado.

1 Lema. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X, \mu)$. Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mu)$ tal que*

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Demostración. Pongamos $f_0 := 0_X$. Definimos $v\colon X \to [0, +\infty]$,

$$v(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Del teorema de la convergencia monótona se sigue que

$$\int_X v \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}\mu = N_1(f_1) + \sum_{n=1}^{\infty} N_1(f_n - f_{n-1}) \le N_1(f_1) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} < +\infty.$$

Pongamos

$$M := \{x \in X : \ v(x) = +\infty\}, \qquad Y := \{x \in X : \ v(x) < +\infty\}.$$

Como $\int_X v \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, tenemos que $\mu(M) = 0$. Para cada x en Y, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n-1}(x))$$

converge absolutamente y por lo tanto converge. Las sumas parciales de esta serie son

$$\sum_{n=1}^{k} (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_k(x) - f_0(x) = f_k(x).$$

Por lo tanto, para cada x en Y, la sucesión de números $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite. Pongamos

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & x \in Y; \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Entonces para cada x en Y tenemos que $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$. Concluimos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$. $\square$

2 Lema. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ *y sea* g *en* $\mathcal{M}(X,\mu)$ *tal que*

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g.$$

Entonces $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *y* $N_1(f_n - g) \to 0$*, cuando* $n \to \infty$*.*

Demostración. Denotamos por γ_f el medidor de Cauchy de la sucesión f:

$$\gamma_f(k) \coloneqq \sup_{m,n\geq k} N_1(f_m - f_n).$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$. Entonces

$$\forall n \geq k \qquad \int\limits_X |f_n - f_k|\,\mathrm{d}\mu = N_1(f_n - f_k) \leq \gamma_f(k). \tag{1}$$

Fijemos k en $\mathbb{N}$ y apliquemos el lema de Fatou a la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $h_n \coloneqq |f_n - f_k|$.

$$\int\limits_X \Big(\liminf_{n\to\infty} |f_n - f_k|\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f_k|\,\mathrm{d}\mu.$$

Como $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$, en el lado izquierdo obtenemos $\int_X |g - f_k|\,\mathrm{d}\mu$, esto es, $N_1(g - f_k)$. Debido a (1), el lado derecho se acota por $\gamma_f(k)$. Por lo tanto,

$$N_1(g - f_k) \leq \gamma_f(k).$$

En particular, esto implica que

$$N_1(g) = N_1(g - f_1 + f_1) \leq N_1(g - f_1) + N_1(f_1) \leq \gamma_f(1) + N_1(f_1) < +\infty,$$

así que $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Más aún, como f es una sucesión de Cauchy, $\gamma_f \to 0$ y por lo tanto $N_1(g - f_k) \to 0$, cuando $k \to \infty$. □

3 Proposición. *Sea* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *un espacio de medida. Entonces el espacio seminormado* $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ *es completo.*

Demostración. Se sigue de los Lemas 1 y 2. □

4 Teorema. *Sea* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *un espacio de medida. Entonces el espacio normado* $L^1(X,\mu)$ *es completo.*

Demostración. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^1(X,\mu)$. Para cada n en $\mathbb{N}$, elegimos f_n en F_n. Entonces para cada m,n en $\mathbb{N}$ tenemos que $f_m - f_n \in F_m - F_n$ y

$$N_1(f_m - f_n) = \|F_m - F_n\|_1.$$

Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$. Por la Proposición 3, existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $N_1(f_n - g) \to 0$, cuando $n \to \infty$. Pongamos $G \coloneqq g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces $G \in L^1(X,\mu)$ y para cada n en $\mathbb{N}$ obtenemos $f_n - g \in F_n - G$, por eso

$$\|F_n - G\|_1 = N_1(f_n - g) \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. □

5 Ejercicio. Escribir otra demostración de la Proposición 3 usando el criterio de completez de espacios normados o seminormados en términos de la convergencia de series. Suponer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_1(u_n) < +\infty,$$

y construir $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} N_1\left(\sum_{n=1}^{k} u_n - g\right) = 0.$$

6 Ejercicio. Hallar un espacio de medida $(X,\mathcal{F},\mu)$ y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tales que:

- $\mu(X) > 0$,
- $N_1(f_n) \to 0$, cuando $n\to\infty$,
- para cada x en X se tiene que $f_n(x) \not\to 0$.

Mostrar que:

- $N_1(f_n - 0_X) \to 0$, cuando $n\to\infty$,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$,
- no existe g en $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Este ejemplo muestra que en el Lema 1 no es suficiente pedir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de Cauchy.