Desigualdad de Jensen

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Jensen y conocer algunas de sus aplicaciones.

Requisitos. Funciones convexas, derivadas unilaterales de una función convexa.

1. Proposición sobre la recta básica de la gráfica de una función convexa. Sean $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\varphi \colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa y c un punto interior de A. Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo x en A

$$\varphi(x) \ge \alpha(x - c) + f(c). \tag{1}$$

El papel de α puede hacer cualquier elemento del intervalo cerrado $[\varphi'_{izq}(c), \varphi'_{der}(c)]$.

Demostración. Como φ es convexa, sus derivadas unilaterales en el punto c existen, son finitas y satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\varphi'_{izq}(c) \le \varphi'_{der}(c).$$

Sea α cualquier número del intervalo $[\varphi'_{izq}(c), \varphi'_{der}(c)]$.

I. Probemos (1) para todo x en A tal que $x < c$. De la fórmula

$$\varphi'_{izq}(c) = \sup_{\substack{x \in A \\ x < c}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c}$$

se sigue que para todo $x < c$ se cumple la desigualdad

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} \le \varphi'_{izq}(c) \le \alpha.$$

Multiplicamos esta desigualdad por el número negativo $x - c$:

$$\varphi(x) - \varphi(c) \ge \alpha(x - c).$$

Al despejar $\varphi(x)$ obtenemos (1).

II. Si $x \in A$ y $x > c$, entonces (1) se obtiene de la fórmula

$$\varphi'_{der}(c) = \inf_{\substack{x \in A \\ x > c}} \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c},$$

al multiplicarla $x - c > 0$ y despejar $\varphi(x)$.

III. Para $x = c$ la fórmula (1) se convierte en la igualdad trivial $\varphi(c) = \varphi(c)$. $\square$

2. Desigualdad de Jensen finita (repaso). Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces para cualquier m en $\mathbb{N}$, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en A y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ con $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j).$$

3. Teorema (desigualdad de Jensen). Sean:

1) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$ (es decir, un espacio de probabilidad);

2) A un intervalo del eje real $\mathbb{R}$;

3) $g \in L^1(X, \mu, A)$, es decir, sea g un una función μ-integrable con valores en A;

4) $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa.

Entonces

$$f\left(\int_X g \,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X f \circ g \,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Demostración. Sean a y b los extremos del intervalo A, y sea c el valor promedio de g en el conjunto X respecto a la medida μ:

$$a := \inf(A), \qquad b := \sup(A), \qquad c := \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

1. Demostremos que $c \in [a, b]$. Para todo x en X tenemos que $g(x) \in A$ y por lo tanto $g(x) \geq a$. Esto significa que $g \geq a$ o, más formalmente, $g \geq a 1_X$, donde 1_X es la función constante 1 definida en X. Aplicamos la propiedad monótona de la integral:

$$c = \int_X g \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X a \,\mathrm{d}\mu = a.$$

De manera similar, $g \leq b$ y

$$c = \int_X g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X b \,\mathrm{d}\mu = b.$$

Estas desigualdades muestran que $c \in [a, b]$. Consideremos tres casos: $c = a$, $c = b$ y $c \in (a, b)$.

2. Si $c = a$, entonces

$$\int_X (g - a)\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\mu - \int_X a\,\mathrm{d}\mu = c - a = 0.$$

Notando que $g - a \geq 0$ concluimos que en este caso $g = a$ c.t.p. en X. Como $\mu(X) = 1 > 0$ y $\mu(\{x \in X\colon\ g(x) \neq a\}) = 0$, existen puntos $x \in X$ con $g(x) = a = c$. Esto significa que el número $a = c$ pertenece a la imagen (es decir, al conjunto de los valores) de la función g y por lo tanto pertenece al intervalo A. La desigualdad (2) en este caso se convierte en una igualdad:

$$\int_X (f \circ g)\mathrm{d}\mu = f(a) \int_X \mathrm{d}\mu = f(a) = f(c).$$

3. Si $c = b$, entonces de manera similar se demuestra que $g = b 1_X$ c.t.p. en X, $c = b \in A$ y ambos lados de (2) son iguales al número $f(c) = f(b)$.

4. Consideremos el caso principal, cuando $c \in (a, b)$. Entonces c es un punto interior del intervalo A y podemos aplicar la proposición sobre la recta básica de la gráfica de una función convexa. Elegimos algún elemento α del intervalo cerrado $[f'_{izq}(c), f'_{der}(c)]$ y obtenemos que

$$\forall t \in A \qquad f(t) \geq f(c) + \alpha(t - c).$$

Sustituimos t por $g(x)$:

$$\forall x \in X \qquad (f \circ g)(x) \geq f(c) + \alpha(f(x) - c).$$

Integramos sobre X respecto la medida μ y aplicamos la hipótesis que $\mu(X) = 1$:

$$\int_X (f \circ g)\,\mathrm{d}\mu \geq f(c) + \alpha \left(\int_X g\,\mathrm{d}\mu - c \right) = f(c). \qquad \square$$

4. Ejemplo. Sea $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función medible e integrable y sea $p \geq 1$. Entonces

$$\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu \right)^p \leq \int_X f^p\,\mathrm{d}\mu.$$

Aquí la función convexa es $\varphi(t) = t^p$.

5. Ejercicio (desigualdad de Hardy). Sea $f\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ una función medible y sea $p > 1$. Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x.$$