Desigualdad de Hölder

(un tema de la unidad “Espacios L^p”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

10 de octubre de 2022

Plan

Objetivos:

- Demostrar la desigualdad de Hölder para funciones medibles sobre un espacio de medida.

$$\int_X |f|\,|g|\,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}, \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

- Enunciar un criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder.
- Enunciar el "teorema inverso de Hölder".

Aplicaciones

- La propiedad subaditiva de N_p (la desigualdad de Minkowski).
- La cota superior de Schur para los operadores integrales.
- La comparación de las seminormas N_p para $\mu(X) < +\infty$.
- Varias otras desigualdades integrales.

Prerrequisitos

- La desigualdad de Young: $\quad ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
- La integral de Lebesgue.
- La desigualdad de Chebyshov–Márkov.

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Repaso: funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de las funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

El vector cero de este espacio es la función constante cero. La denotamos por 0_X.

La seminorma extendida N_p, $1 \leq p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

La seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

En un futuro demostaremos que N_p es subaditiva (es la desigualdad de Minkowski).

Antes de esto, demostraremos la desigualdad de Hölder.

N_p es absolutamente homogénea

Ejercicio.

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\alpha \geq 0$. Demostrar que

$$N_p(\alpha f) = \alpha\, N_p(f).$$

N_p es absolutamente homogénea

Ejercicio.
Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\alpha \geq 0$. Demostrar que

$$N_p(\alpha f) = \alpha\, N_p(f).$$

Ejercicio.
Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$N_p(\lambda f) = |\lambda|\, N_p(f).$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\quad \mu(A) = 0 \quad$ y

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \iff \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f)$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\quad \mu(A) = 0 \quad$ y $\quad N_p^p(f) =$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X : \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\quad \mu(A) = 0 \quad$ y $\quad N_p^p(f) = \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu =$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \, \mathrm{d}\mu + \int_A f^p \, \mathrm{d}\mu$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A := \{x \in X \colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$ y $N_p^p(f) = \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \, \mathrm{d}\mu + \int_A f^p \, \mathrm{d}\mu =$

¿Cuándo $N_p(f) = 0$?

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$N_p(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X.$$

Demostración de $\Longleftarrow$. Supongamos que $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

$$A \coloneqq \{x \in X\colon \quad f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $\quad \mu(A) = 0 \quad$ y $\quad N_p^p(f) = \displaystyle\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus A} f^p \,\mathrm{d}\mu + \int_A f^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A \coloneqq \{x \in X\colon \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m \coloneqq \left\{x \in X\colon \quad f(x) \ge \frac{1}{m}\right\}.$$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A \coloneqq \{x \in X\colon \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m \coloneqq \left\{x \in X\colon \quad f(x) \ge \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu(B_m) = \mu\left(\left\{x \in X\colon \quad f^p(x) \ge \frac{1}{m^p}\right\}\right) \le m^p \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración de $\Longrightarrow$.

Supongamos que $N_p(f) = 0$.

$$A := \{x \in X\colon \quad f(x) > 0\}, \qquad B_m := \left\{x \in X\colon \quad f(x) \ge \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la desigualdad de Chebyshov–Márkov,

$$\mu(B_m) = \mu\left(\left\{x \in X\colon \quad f^p(x) \ge \frac{1}{m^p}\right\}\right) \le m^p \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Como $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$,

$$\mu(A) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = 0.$$

Repaso: desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Repaso: desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0,\ p, q > 1,$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ejercicio. Demostrar esta desigualdad usando la convexidad de la función $\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Plan

Desigualdad de Hölder para funciones medibles positivas

Teorema

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \le N_p(f) N_q(g).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \le N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \le N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \le N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \le N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_p(f) > 0$, $N_q(g) > 0$, $N_p(f) = +\infty$ o $N_q(g) = +\infty$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, casos triviales

Por demostrar:

$$N_1(f\,g) \le N_p(f) N_q(g).$$

Caso $N_p(f) = 0$: $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_q(g) = 0$: $\quad g \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$, luego $N_1(f\,g) = 0$.

Caso $N_p(f) > 0$, $N_q(g) > 0$, $N_p(f) = +\infty$ o $N_q(g) = +\infty$: $\quad$ el lado derecho es $+\infty$.

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)}$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g)$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Demostración de la desigualdad de Hölder, el caso principal

Supongamos $\quad 0 < N_p(f) < +\infty, \quad 0 < N_q(g) < +\infty.$

Aplicamos la desigualdad de Young $\quad ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \quad$ con $\quad a = \dfrac{f(x)}{N_p(f)}, \quad b = \dfrac{g(x)}{N_q(g)}$:

$$\frac{f(x)\,g(x)}{N_p(f)N_q(g)} \le \frac{1}{p}\,\frac{f^p(x)}{N_p^p(f)} + \frac{1}{q}\,\frac{g^q(x)}{N_q^q(g)} \qquad (x \in X).$$

Integramos sobre X respecto μ:

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\,N_1(f\,g) \le \frac{1}{p\,N_p^p(f)}\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\,N_q^q(g)}\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Notación útil

Ejercicio.

En la demostración del caso principal, es cómodo definir $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) := \frac{1}{N_p(f)}\, f(x), \qquad v(x) := \frac{1}{N_q(g)}\, g(x).$$

Escribir la demostración usando esta notación.

En otras palabras, trabajar con las funciones u, v en vez de las funciones f, g.

Desigualdad de Hölder para funciones medibles complejas

Corolario

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Plan

Repaso: criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^p = b^q.$$

Repaso: criterio de igualdad en la desigualdad de Young

Proposición

Sean $a, b \geq 0,\ p, q > 1,$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \iff \qquad a^p = b^q.$$

Ejercicio: demostar esta proposición usando la convexidad estricta de la función exponencial.

Repaso: criterio para $\quad h \geq 0 \quad \wedge \quad \int h = 0$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces $h \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0_X$.

Repaso: criterio para $\quad h \geq 0 \quad \wedge \quad \int h = 0$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X h \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Entonces $h \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0_X$.

Idea de demostración:

aplicar la desigualdad de Chevyshov–Márkov.

Repaso: criterio para $\quad \varphi \le \psi \quad \wedge \quad \int \varphi = \int \psi$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que

$$\varphi \le \psi \qquad \wedge \qquad \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_X \psi \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces $\varphi \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \psi$.

Repaso: criterio para $\varphi \leq \psi \quad \wedge \quad \int \varphi = \int \psi$

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que

$$\varphi \leq \psi \qquad \wedge \qquad \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces $\varphi \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \psi$.

Demostración: aplicar la proposición anterior a la función $\psi - \varphi$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $N_p(f) < +\infty$, $N_q(g) < +\infty$.

Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes.

(a) $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} \beta |g|^q\right)$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $N_p(f) < +\infty$, $N_q(g) < +\infty$.

Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes.

(a) $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} \beta |g|^q \right)$.

La condición (b) significa que las funciones $|f|^p$ y $|g|^q$ son linealmente dependientes, "despreciando un conjunto de medida cero".

(b)⇒(a)

Ejercicio. Suponer que

$$\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \beta |g|^q\right).$$

Demostrar que $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

(a)⇒(b), casos triviales

Supongamos que

$$N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g) \qquad \wedge \qquad \Big(N_p(f) = 0 \quad \vee \quad N_q(g) = 0\Big).$$

Mostrar que

$$\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \beta |g|^q\right).$$

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

Definimos $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) := \frac{1}{N_p(f)}\,|f(x)|, \qquad v(x) := \frac{1}{N_q(g)}\,|g(x)|.$$

(a)⇒(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

Definimos $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) := \frac{1}{N_p(f)}\,|f(x)|, \qquad v(x) := \frac{1}{N_q(g)}\,|g(x)|.$$

Ejercicio. Usando la condición $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$ mostrar que

$$\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q\right)\,\mathrm{d}\mu.$$

(a)$\Rightarrow$(b), caso principal, inicio

Supongamos que $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$.

Definimos $u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$u(x) := \frac{1}{N_p(f)}\,|f(x)|, \qquad v(x) := \frac{1}{N_q(g)}\,|g(x)|.$$

Ejercicio. Usando la condición $N_1(f\,g) = N_p(f)N_q(g)$ mostrar que

$$\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q\right)\mathrm{d}\mu.$$

Sugerencia: revisar la demostración de la desigualdad de Hölder.

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q\right)\,\mathrm{d}\mu.$$

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\, v \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q \right) \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young,

$$u\, v \leq \frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q.$$

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q\right)\,\mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young,

$$u\,v \le \frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q.$$

Concluimos que existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad u(x)\,v(x) = \frac{1}{p}\,u(x)^p + \frac{1}{q}\,v(x)^q.$$

(a)⇒(b), caso principal, final

Obtenemos que

$$\int_X u\, v \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q\right)\,\mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young,

$$u\, v \le \frac{1}{p}\, u^p + \frac{1}{q}\, v^q.$$

Concluimos que existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$ y

$$\forall x \in Y \qquad u(x)\, v(x) = \frac{1}{p}\, u(x)^p + \frac{1}{q}\, v(x)^q.$$

Ejercicio: usar el criterio de igualdad en la desigualdad de Young, completar la demostración.

Plan

El teorema inverso de Hölder

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < N_p(f) < +\infty$.
Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu = 1 \qquad \wedge \qquad \int_X f\, g \, \mathrm{d}\mu = N_p(f).$$

El teorema inverso de Hölder

Teorema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < N_p(f) < +\infty$. Entonces existe g en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu = 1 \qquad \wedge \qquad \int_X f\, g \, \mathrm{d}\mu = N_p(f).$$

Idea de demostración.

$$g(x) := \begin{cases} N_p(f)^{-p/q} \, |f(x)|^{p-2} \, \overline{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0; \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Dualidad entre N_p y N_q

Corolario

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < N_p(f) < +\infty$.
Entonces

$$N_p(f) = \sup\left\{ \left| \int_X fg \,\mathrm{d}\mu \right| : \quad g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}), \quad N_q(g) \leq 1 \right\}.$$