Desigualdad de Hölder

Objetivos. Demostrar la desigualdades de Hölder y el teorema inverso de Hölder.

Requisitos. Desigualdad de Young, la integral de Lebesgue, la propiedad monótona de la integral de Lebesgue.

Aplicaciones. Desigualdad de Minkowski.

1. Exponentes conjugados, repaso. Dos números $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados*. Tal vez otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*. Es fácil ver que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p-1)q = p. \tag{1}$$

2. Desigualdad de Young, repaso. Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2}$$

3. Teorema (desigualdad de Hölder para funciones positivas). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int\limits_X f\, g \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int\limits_X f^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_X g^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/q}. \tag{3}$$

Demostración. Denotemos por α y β los factores que están en el lado derecho de (4):

$$\alpha := \left(\int\limits_X f^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}, \qquad \beta := \left(\int\limits_X g^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f = 0$ casi en todas partes, y la desigualdad (4) se convierte en la igualdad trivial $0 = 0$. De manera similar se considera el caso cuando $\beta = 0$. Si $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\alpha = +\infty$ o $\beta = +\infty$, entonces el lado derecho de (4) es $+\infty$, y (4) se cumple de manera trivial.

Consideremos el caso principal cuando α y β son números finitos y estrictamente positivos: $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Denotemos por u y v a las funciones que se obtienen de f y g después de "normalizarlas" de la siguiente manera:

$$u := \frac{f}{\alpha}, \qquad v := \frac{g}{\beta}.$$

Entonces

$$\int_X u^p \, d\mu = \frac{1}{\alpha^p} \int_X f^p \, \mathrm{d}\mu = 1, \qquad \int_X v^q \, d\mu = \frac{1}{\beta^q} \int_X g^q \, \mathrm{d}\mu = 1.$$

Para todo $x \in X$ aplicamos la desigualdad de Young (2) a los números $u(x)$ y $v(x)$:

$$u(x)v(x) \leq \frac{u(x)^p}{p} + \frac{v(x)^q}{q},$$

luego integramos ambos lados sobre X respecto a la medida μ:

$$\int_X uv \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hemos demostrado que $\frac{1}{\alpha\beta} \int_X uv \, d\mu \leq 1$, esto es, $\int_X fg \, d\mu \leq \alpha\beta$. $\square$

4. Teorema (desigualdad de Hölder para funciones reales o complejas). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int_X |f| \, |g| \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}. \tag{4}$$

Demostración. Aplicamos el Teorema 3 a las funciones $|f|$ y $|g|$ en vez de f y g, respectivamente. $\square$

5. Observación (la desigualdad de Hölder para los casos $p = 1$ y $p = \infty$). Luego vamos a definir el supremo esencial de una función medible no negativa (definida en un espacio de medida) y mostrar que la desigualdad de Hölder tiene sentido para $p = 1$ y $q = +\infty$, o bien para $p = +\infty$ y $q = 1$.

6. Tarea adicional. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 0$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Determine qué condición sobre las funciones f y g es necesaria y suficiente para que la desigualdad de Hölder se convierta en una igualdad.

El siguiente teorema se llama a veces “el teorema inverso de Hölder”.

7. Teorema. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que $0 < \alpha < +\infty$, donde $\alpha \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$. Entonces existe una función $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que

$$\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu = 1 \qquad \text{y} \qquad \int_X fg \, \mathrm{d}\mu = \alpha. \tag{5}$$

Idea de demostración. Para todo punto $x \in X$ definimos $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \alpha^{-p/q}\,|f(x)|^{p-2}\,\overline{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0; \\ 0, & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Se puede verificar que $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Con ayuda de (1) se prueba fácilmente que se cumplen las propiedades (5). $\square$

8. Observación. Los Teoremas 4 y 7 juntos implican que

$$\left(\int\limits_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = \sup\left\{ \left| \int\limits_X fg \,\mathrm{d}\mu \right| : \quad g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}), \quad \int\limits_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu = 1 \right\}. \tag{6}$$

Después de definir los espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, veremos que (6) describe la norma $\|\cdot\|_p$ en términos de la norma $\|\cdot\|_q$. Además la identidad (6) (o los Teoremas 4 y 7 juntos) hace un papel importante en la descripción del espacio dual del espacio $L^p(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.