# Teorema de Hahn–Banach, forma algebraica real

**1 Lema.** *Sean $V$ un espacio vectorial real, $W$ un subespacio vectorial de $V$, $u \in V \setminus W$. Entonces:*

*1) $W \cap (\mathbb{R}u) = \{0_V\}$;*

*2) para cada $v$ en $W + \mathbb{R}u$, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{R}$ tal que $v = w + \lambda u$.*

*En otras palabras, el subespacio $W + \mathbb{R}u$ es la suma directa de $W$ y $\mathbb{R}u$.*

**2 Lema.** *Sean $V$ un espacio vectorial real, $W$ un subespacio vectorial de $V$, $u \in V \setminus W$. Sea $f\colon W \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único funcional lineal $g\colon W + \mathbb{R}u \to \mathbb{R}$ tal que $g|_W = f$ y $g(u) = \gamma$.*

*Demostración.* Para cada $v$ en $W + \mathbb{R}u$, por el Lema 1, existe un único par $(w, \lambda)$ en $W \times \mathbb{R}$ tal que $v = w + \lambda u$. Pongamos

$$g(v) \coloneqq f(w) + \lambda\gamma.$$

Entonces $g|_W = f$ y $g(u) = \gamma$. Se deja como un ejercicio la demostración que $g$ es lineal. □

**3 Lema.** *Sean $V$ un espacio vectorial real normado, $W$ un subespacio vectorial de $V$, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Sea $u \in V \setminus W$. Entonces existe $g \in \mathcal{B}(W + \mathbb{R}u, \mathbb{R})$ tal que $g|_W = f$ y $\|g\| = \|f\|$.*

*Consideraciones previas.* Denotemos $\|f\|$ por $C$. Entonces para cada $x$ en $W$ tenemos que

$$f(x) \le C\|x\|.$$

Queremos definir $g$ mediante la regla

$$g(x + \alpha u) = f(x) + \alpha\gamma \qquad (x \in W,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Como vimos en el Lema 2, esta regla define un funcional lineal en $W + \mathbb{R}u$. Falta elegir $\gamma$ de tal manera que $g(y) \le C\|y\|$ para cada $y$ en $W + \mathbb{R}u$. El número $\gamma$ debe satisfacer

$$f(x) + \gamma \le C\|x + u\|, \qquad f(y) - \gamma \le C\|y - u\|,$$

en otras palabras,

$$f(y) - C\|y - u\| \le \gamma \le C\|x + u\| - f(x).$$

□

*Demostración.* Notemos que para cualesquiera $x, y$ en $W$

$$f(x+y) = f(x+u+y-u) \le C(\|x+u\| + \|y-u\|),$$

por lo cual

$$f(y) - C\|y-u\| \le C\|x+u\| - f(x).$$

Pongamos

$$\gamma = \inf_{x\in W} \big(C\|x+u\| - f(x)\big).$$

Definimos $g\colon W + \mathbb{R}u \to \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla:

$$g(x+\alpha u) \coloneqq f(x) + \alpha\gamma.$$

Por el Lema 2, la definición es consistente y $g$ es lineal.

Para cada $\alpha > 0$ tenemos

$$g(x+\alpha u) = \alpha\left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \gamma\right) \le C\alpha\left\|\frac{x}{\alpha} + u\right\| = C\|x+\alpha u\|,$$

y

$$g(x-\alpha u) = \alpha\left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \gamma\right) \le C\alpha\left\|\frac{x}{\alpha} - u\right\| = C\|x-\alpha u\|.$$

Hemos demostrado que $g(y) \le C\|y\|$ para cada $y$ en $W + \mathbb{R}u$. Luego

$$-g(y) = g(-y) \le C\|-y\| = C\|y\|,$$

así que $|g(y)| \le C\|y\|$. $\square$

**4 Lema.** *Sean $V$ un espacio normado real y $C \ge 0$. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto de los pares ordenados de la forma $(S, g)$, donde $S$ es un subespacio de $V$, $g$ es un funcional lineal acotado en $S$ y $\|g\| \le C$. La siguiente relación binaria es un orden parcial en $\mathcal{A}$:*

$$(S_1, g_1) \preceq (S_2, g_2) \quad\iff\quad S_1 \subseteq S_2 \quad\wedge\quad g_2|_{S_1} = g_1.$$

*Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathcal{A}, \preceq)$. Pongamos*

$$U \coloneqq \bigcup_{(W,g)\in\mathcal{C}} W.$$

*Definimos $h\colon U \to \mathbb{R}$ mediante la regla*

$$h(x) \coloneqq g(x), \qquad \textit{si} \qquad x \in W,\ (W,g) \in \mathcal{C}.$$

*Entonces la definición de $h$ es consistente, $(U, h) \in \mathcal{A}$ y $(U, h)$ es una cota superior de $\mathcal{C}$.*

*Idea de demostración.* Mostremos que la definición de $g$ es consistente. Supongamos que $(W_1, g_1), (W_2, g_2) \in \mathcal{C}$ y $x \in W_1$, $x \in W_2$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, debe cumplirse al menos una de las comparaciones: $(W_1, g_1) \preceq (W_2, g_2)$ o $(W_2, g_2) \preceq (W_1, g_1)$. Consideremos solamente el primer caso (el segundo es similar). Como $g_2|_{W_1} = g_1$, tenemos que $g_2(x) = g_1(x)$.

Mostremos que $U$ es cerrado bajo la adición y $g$ es aditiva. Sean $x_1, x_2 \in U$. Existen $(W_1, g_1)$, $(W_2, g_2)$ en $\mathbb{C}$ tales que $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, debe cumplirse al menos una de las comparaciones: $(W_1, g_1) \preceq (W_2, g_2)$ o $(W_2, g_2) \preceq (W_1, g_1)$. Consideremos solamente el primer caso (el segundo es similar). Como $W_2$ es un subespacio y $g_2$ es lineal, obtenemos $x_1 + x_2 \in U$

$$h(x_1 + x_2) = g_2(x_1 + x_2) = g_2(x_1) + g_2(x_2) = h(x_1) + h(x_2). \qquad \square$$

**5 Teorema.** *Sean $V$ un espacio vectorial real normado, $W$ un subespacio vectorial de $V$, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Entonces existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|F\| \le \|f\|$ y $F|_W = f$.*

*Demostración para el caso de espacio real separable.* Demostración para el caso cuando $V$ es separable. Sea $D = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable y denso en $V$. Pongamos $C \coloneqq \|f\|$,

$$S_j = \ell_{\mathbb{R}}(W \cup \{x_1, \ldots, x_j\}) = W + \left( \sum_{k=1}^{j} \mathbb{R} x_j \right).$$

Además, pongamos $S_0 \coloneqq W$ y $g_0 \coloneqq f$. Notamos que $S_j = S_{j-1} + \mathbb{R} x_j$. Usamos la inducción matemática sobre $j$ para definir $g_j \colon S_j \to \mathbb{R}$. Si $x_j \notin S_{j-1}$, entonces aplicamos el Lema 3. Si $x_j \in S_{j-1}$, entonces $S_j = S_{j-1}$ y ponemos $g_j \coloneqq g_{j-1}$. En ambos casos, $g_j \in \mathcal{B}(S_j, \mathbb{R})$, $g_j|_{S_{j-1}} = g_j$, y $\|g_j\| \le C$. Definamos $(\mathcal{A}, \preceq)$ como en el Lema 4. Notemos que $\{(S_j, g_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una cadena en $\mathcal{A}$. Pongamos

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$$

y definimos $g \in \mathcal{B}(U, \mathbb{R})$ como en el Lema 4. Finalmente notamos que $U$ es denso en $V$ y $g$ es una función uniformemente continua. Extendemos $g$ por continuidad a un funcional $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$. $\square$

*Demostración para el caso general.* Pongamos $C = \|f\|$ y definimos $(\mathcal{A}, \preceq)$ como en el Lema 4. Denotemos por $\mathcal{A}_0$ al conjunto de los pares $(S, g)$ tales que $(S, g) \in \mathcal{A}$ y $(W, f) \preceq (S, g)$. Cualquier cadena en $\mathcal{A}_0$ es una cadena en $\mathcal{A}$ y por el Lema 4 tiene una cota superior. Por el Lema de Kuratowski–Zorn, en $\mathcal{A}_0$ existe un elemento máximal, digamos $(M, F)$. Si $M \ne V$, entonces elegimos $x \in V \setminus M$, aplicamos el Lema 3 al subespacio $M$, vector $x$ y funcional $F$, y construimos un par estrictamente más grande que $(M, F)$, lo cual constradice a la suposición que $(M, F)$ es maximal. Luego $M = V$, y el funcional $F$ es tiene propiedades requeridas. $\square$

**6 Teorema** (teorema de Hahn–Banach para espacios normados complejos)**.** *Sean $V$ un espacio vectorial complejo normado, $W$ un subespacio vectorial de $V$, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{C})$. Entonces existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ tal que $\|F\| \le \|f\|$ y $F_W = f$.*

*Demostración.* Definimos $u\colon W \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$u(x) \coloneqq \operatorname{Re}(f(x)).$$

Entonces $u \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$ y $\|u\| \le \|f\|$. Además, para cada $z$ en $\mathbb{C}$ tenemos

$$z = \operatorname{Re}(z) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(\mathrm{i}\,z),$$

luego

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(\mathrm{i}\,f(x)) = u(x) - \mathrm{i}\,u(\mathrm{i}\,x).$$

Usando el teorema de Hahn–Banach para el caso real, extendemos $u$ a un funcional $U \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|U\| \le \|f\|$. Pongamos

$$F(x) \coloneqq U(x) - \mathrm{i}\,U(\mathrm{i}\,x).$$

Entonces $F(\alpha x) = \alpha x$ para cada $\alpha$ en $\mathbb{R}$, y además

$$F(\mathrm{i}\,x) = U(\mathrm{i}\,x) + \mathrm{i}\,U(x) = \mathrm{i}\,F(x),$$

así que $F$ es $\mathbb{C}$-lineal. Finalmente, para cada $x$ en $V$ encontramos $\alpha$ en $\mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha F(x) \ge 0$, luego

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = \operatorname{Re}(F(\alpha x)) = U(\alpha x) \le \|f\|\,\|\alpha x\| = \|f\|\,\|x\|,$$

así que $\|F\| \le \|f\|$. □

**7 Corolario.** *Sea $V$ un espacio normado real o complejo no nulo, y sea $x \in V$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $\|f\| \le 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

**8 Corolario** (los funcionales distinguen los puntos)**.** *Sea $V$ un espacio normado real o complejo, y sean $x, y \in V$ tales que $x \ne y$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(x) \ne f(y)$.*

**9 Ejercicio.** Sea $S$ un subespacio cerrado de $V$ y sea $x \in V \setminus S$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(y) = 0$ para cada $y$ en $S$, y $f(x) \ne 0$.

**10 Ejercicio.** Sea $V$ un espacio normado y sean $v_1, \ldots, v_n \in V$ vectores linealmente independientes. Entonces existen funcionales $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ tales que $f_j(v_k) = \delta_{j,k}$.