Teorema de Hahn–Banach,
forma algebraica compleja

Ya hemos demostrado el teorema de Hahn–Banach para los espacios normados real. Ahora vamos a extenderlo al caso complejo.

1 Lema. *Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$z = \operatorname{Re}(z) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(\mathrm{i}\,z).$$

Demostración. Supongamos que $z = x + \mathrm{i}\,y$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Por la definición de Re, tenemos que $x = \operatorname{Re}(z)$. Además, $\mathrm{i}\,z = \mathrm{i}\,x - y$, por eso $y = -\operatorname{Re}(\mathrm{i}\,z)$. □

2 Teorema (teorema de Hahn–Banach para espacios normados complejos)**.** *Sean V un espacio vectorial complejo normado, W un subespacio vectorial de V, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{C})$. Entonces existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C})$ tal que $\|F\| \le \|f\|$ y $F_W = f$.*

Demostración. Definimos $u\colon W \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$u(x) \coloneqq \operatorname{Re}(f(x)).$$

Entonces $u \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$ y $\|u\| \le \|f\|$. Aplicamos el Lema 1 al número complejo $f(x)$, luego usamos la linealidad de f y la definición de u:

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(\mathrm{i}\,f(x)) = \operatorname{Re}(f(x)) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(f(\mathrm{i}\,x)) = u(x) - \mathrm{i}\,u(\mathrm{i}\,x).$$

Usando el teorema de Hahn–Banach para el caso real, extendemos u a un funcional $U \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|U\| \le \|f\|$. Pongamos

$$F(x) \coloneqq U(x) - \mathrm{i}\,U(\mathrm{i}\,x).$$

Entonces $U(x) = \operatorname{Re}(F(x))$ para cada x en V, así que $U|_W = u$. Para cada α en $\mathbb{R}$ obtenemos fácilmente $F(\alpha x) = \alpha F(x)$. Además,

$$F(\mathrm{i}\,x) = U(\mathrm{i}\,x) + \mathrm{i}\,U(x) = \mathrm{i}\,F(x),$$

así que F es $\mathbb{C}$-lineal. Finalmente, para cada x en V encontramos α en $\mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha F(x) \ge 0$, luego

$$|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = \operatorname{Re}(F(\alpha x)) = U(\alpha x) \le \|f\|\,\|\alpha x\| = \|f\|\,\|x\|.$$

Hemos demostrado que $\|F\| \le \|f\|$. □

3 Corolario. *Sea V un espacio normado real o complejo no nulo, y sea $x \in V$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $\|f\| \le 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

Demostración. Escribimos la demostración para el caso complejo. Si $x = 0_V$, entonces definimos f como el funcional cero. Si $x \ne 0_V$, entonces pongamos $W := \mathbb{C}x$ y definimos $g\colon W \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$g(\alpha x) := \alpha\,\|x\|.$$

Entonces $g \in W^*$, $\|g\| = 1$ y $g(x) = \|x\|$. Usando el Teorema de Hahn–Banach, encontramos una extensión f de g tal que $\|f\| = 1$. $\square$

4 Corolario (los funcionales distinguen los puntos)**.** *Sea V un espacio normado real o complejo, y sean $x, y \in V$ tales que $x \ne y$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(x) \ne f(y)$.*

Demostración. Aplicamos el corolario anterior al vector $x - y$. $\square$

5 Ejercicio. Sea S un subespacio cerrado de V y sea $x \in V \setminus S$. Entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(y) = 0$ para cada y en S, y $f(x) \ne 0$.

6 Ejercicio. Sea V un espacio normado y sean $v_1, \ldots, v_n \in V$ vectores linealmente independientes. Entonces existen funcionales $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ tales que $f_j(v_k) = \delta_{j,k}$.