Ortogonalización de Gram–Schmidt (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

7 de junio de 2022

Plan

1. Introducción
2. Repaso
3. Teorema
4. Corolarios
5. Ejercicios y ejemplos

Objetivos

En este tema suponemos que H es espacio vectorial real o complejo con producto interno.

Vamos a estudiar el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt.

Queremos demostrar el siguiente teorema.

Teorema (ortogonalización de Gram–Schmidt)

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$ *tales que la lista* $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*, pongamos* $S_j := \ell(a_1, \ldots, a_j)$*.*

Construimos $b_1, \ldots, b_m$ *mediante las siguientes reglas:*

$$b_j := a_j - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2}\, b_k.$$

Entonces para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*,* $\quad (b_1, \ldots, b_j)$ *es una base ortogonal de* S_j*.*

Teorema (ortogonalización de Gram–Schmidt)

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$ *tales que la lista* $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$, *pongamos* $S_j := \ell(a_1, \ldots, a_j)$.

Construimos $b_1, \ldots, b_m$ *mediante las siguientes reglas:*

$$\boxed{b_j := a_j - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2}\, b_k.}$$

Entonces para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$, $(b_1, \ldots, b_j)$ *es una base ortogonal de* S_j.

En otras palabras, estamos afirmando que para cada j en $\{1, \ldots, m\}$

$$b_j \neq 0_H, \qquad \ell(a_1, \ldots, a_j) = \ell(b_1, \ldots, b_j), \qquad (b_1, \ldots, b_m) \text{ es ortogonal.}$$

Prerrequisitos

- Listas de vectores linealmente dependientes.
- Listas de vectores ortogonales y ortonormales.
- La proyección ortogonal del vector sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores.

Algunas aplicaciones que no veremos en esta presentación

- Construcción de bases ortogonales en varios espacios de funciones, asociados a ecuaciones diferenciales.
- Sucesiones de polinomios ortogonales en cierto intervalo con cierto peso.
- La descomposición QR de matrices.
- Solución del problema de mínimos cuadrados.
- Solución del problema del mejor ajuste.

Repaso: la envoltura lineal de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial complejo, y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$.

Repaso: la envoltura lineal de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial complejo, y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$.

Denotamos por $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_m$:

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \ := \ \left\{ v \in V : \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = v \right\}.$$

Repaso: la envoltura lineal de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial complejo, y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$.

Denotamos por $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_m$:

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \ := \ \left\{ v \in V : \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = v \right\}.$$

Sabemos que $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ es el mínimo (por contención)
entre todos los subespacios vectoriales de V que contienen $a_1, \ldots, a_m$.

Repaso: la envoltura lineal de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial complejo, y sean $a_1, \ldots, a_m \in V$.

Denotamos por $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de $a_1, \ldots, a_m$:

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \;\coloneqq\; \left\{ v \in V : \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = v \right\}.$$

Sabemos que $\ell(a_1, \ldots, a_m)$ es el mínimo (por contención)
entre todos los subespacios vectoriales de V que contienen $a_1, \ldots, a_m$.

Para la lista vacía (con $m = 0$), se pone $\ell() = \{0_V\}$.

Repaso: criterio de contención para envolturas lineales

Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $W \leq V$, es decir, sea W un subespacio vectorial de V.
Entonces

$$\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq W \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1, \ldots, a_m \in W.$$

Repaso: listas de vectores linealmente independientes

Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$.

Se dice que la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente, si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \qquad \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \right).$$

Proposición

Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- *la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente;*
- *para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, $a_j \notin \ell(a_1, \ldots, a_{j-1})$.*

Repaso: listas ortogonales de vectores

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Repaso: listas ortogonales de vectores

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Dados $a_1, \ldots, a_m$, se dice que la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es ortogonal, si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \Big(j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad a_j \perp a_k \Big).$$

Repaso: listas ortogonales de vectores

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Dados $a_1, \ldots, a_m$, se dice que la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es ortogonal, si

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, m\} \qquad \Big(j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad a_j \perp a_k\Big).$$

Sabemos que si $(a_1, \ldots, a_m)$ es ortogonal y los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son no nulos, entonces $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente.

Repaso: la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores no nulos

Proposición

Sea $(b_1, \ldots, b_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H, *y sea* $v \in H$.
Pongamos $S := \ell(b_1, \ldots, b_m)$.
Entonces existe un único vector u *en* S *tal que* $v - u \in S^{\perp}$.

Repaso: la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores no nulos

Proposición

Sea $(b_1, \ldots, b_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*, y sea* $v \in H$*.*
Pongamos $S := \ell(b_1, \ldots, b_m)$*.*
Entonces existe un único vector u *en* S *tal que* $v - u \in S^\perp$*.*

Notemos que u se determina por S y v, por eso podemos denotar u como $P_S(v)$.

Repaso: la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por una lista ortogonal de vectores no nulos

Proposición

Sea $(b_1, \ldots, b_m)$ *una lista ortogonal de vectores no nulos en* H*, y sea* $v \in H$*.*
Pongamos $S := \ell(b_1, \ldots, b_m)$*.*
Entonces existe un único vector u *en* S *tal que* $v - u \in S^\perp$*.*

Notemos que u se determina por S y v, por eso podemos denotar u como $P_S(v)$.

Fórmula eficiente para $P_S(v)$:

$$P_S(v) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle v, b_k \rangle}{\|b_k\|} b_k.$$

Teorema (sobre la ortogonalización de Gram–Schmidt)

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista linealmente independiente en* H*.*

Para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*, pongamos* $S_j := \ell(a_1, \ldots, a_j)$*.*

Definimos $b_1, \ldots, b_m$ *por pasos. Para cada* j *en* $\{1, \ldots, m\}$*,*

$$b_j := a_j - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} \, b_k.$$

Entonces para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*,* $(b_1, \ldots, b_m)$ *es una base ortonormal de* S_j*.*

Demostración

Paso 1.

Como $a_1 \neq 0_H$, obtenemos

$$b_1 = a_1 \neq 0_H.$$

De la fórmula $b_1 = a_1$ se sigue que

$$S_1 = \ell(a_1) = \ell(b_1).$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(b_1, \ldots, b_m) \subseteq \ell(a_1, \ldots, a_m)$

Consideramos el paso j, suponiendo que $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una base ortonormal de S_{j-1}.

Demostración, paso de inducción, $\ell(b_1, \ldots, b_m) \subseteq \ell(a_1, \ldots, a_m)$

Consideramos el paso j, suponiendo que $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una base ortonormal de S_{j-1}.

Pongamos

$$u_j := \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2}\, b_k.$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(b_1, \ldots, b_m) \subseteq \ell(a_1, \ldots, a_m)$

Consideramos el paso j, suponiendo que $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una base ortonormal de S_{j-1}.

Pongamos

$$u_j := \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2}\, b_k.$$

Entonces

$$u_j \in S_{j-1} = \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(b_1, \ldots, b_m) \subseteq \ell(a_1, \ldots, a_m)$

Consideramos el paso j, suponiendo que $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una base ortonormal de S_{j-1}.

Pongamos

$$u_j := \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2} \, b_k.$$

Entonces

$$u_j \in S_{j-1} = \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Luego

$$b_j = a_j - u_j \in$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(b_1, \dots, b_m) \subseteq \ell(a_1, \dots, a_m)$

Consideramos el paso j, suponiendo que $(b_1, \dots, b_{j-1})$ es una base ortonormal de S_{j-1}.

Pongamos

$$u_j := \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_k \rangle}{\|b_k\|^2}\, b_k.$$

Entonces

$$u_j \in S_{j-1} = \ell(a_1, \dots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \dots, b_{j-1}).$$

Luego

$$b_j = a_j - u_j \in \ell(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j) = S_j.$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1})$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) =$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Como $b_j = a_j - u_j$,

$$a_j =$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Como $b_j = a_j - u_j$,

$$a_j = b_j + u_j \in$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Como $b_j = a_j - u_j$,

$$a_j = b_j + u_j \in \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}, b_j).$$

Demostración, paso de inducción, $\ell(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \ell(b_1, \ldots, b_m)$

Por la construcción de u_j y por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Como $b_j = a_j - u_j$,

$$a_j = b_j + u_j \in \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}, b_j).$$

Hemos demostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Si $b_j = 0_H$, entonces

$$a_j \in S_j =$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Si $b_j = 0_H$, entonces

$$a_j \in S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j) =$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \dots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \dots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Si $b_j = 0_H$, entonces

$$a_j \in S_j = \ell(b_1, \dots, b_j) = \ell(b_1, \dots, b_{j-1}) =$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Si $b_j = 0_H$, entonces

$$a_j \in S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}) = S_{j-1} =$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Si $b_j = 0_H$, entonces

$$a_j \in S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}) = S_{j-1} = \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}),$$

Demostración, paso de inducción, $b_j \neq 0_H$

Hemos mostrado que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Mostremos que $b_j \neq 0_H$.

Si $b_j = 0_H$, entonces

$$a_j \in S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j) = \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}) = S_{j-1} = \ell(a_1, \ldots, a_{j-1}),$$

lo cual contradice a la suposición que $a_1, \ldots, a_m$ son linealmente independientes.

Demostración, paso de inducción, otra demostración que $b_j \neq 0_H$

Demostremos de otra manera que $b_j \neq 0_H$.

Demostración, paso de inducción, otra demostración que $b_j \neq 0_H$

Demostremos de otra manera que $b_j \neq 0_H$.

Usaremos el concepto de dimensión y algunas propiedades elementales de dimensión.

Demostración, paso de inducción, otra demostración que $b_j \neq 0_H$

Demostremos de otra manera que $b_j \neq 0_H$.

Usaremos el concepto de dimensión y algunas propiedades elementales de dimensión.

Ya sabemos que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Demostración, paso de inducción, otra demostración que $b_j \neq 0_H$

Demostremos de otra manera que $b_j \neq 0_H$.

Usaremos el concepto de dimensión y algunas propiedades elementales de dimensión.

Ya sabemos que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Como $S_j = \ell(a_1, \ldots, a_j)$ y $(a_1, \ldots, a_j)$ es l.i., tenemos $\dim(S_j) = j$.

Demostración, paso de inducción, otra demostración que $b_j \neq 0_H$

Demostremos de otra manera que $b_j \neq 0_H$.

Usaremos el concepto de dimensión y algunas propiedades elementales de dimensión.

Ya sabemos que

$$\underbrace{\ell(a_1, \ldots, a_j)}_{S_j} = \ell(b_1, \ldots, b_j).$$

Como $S_j = \ell(a_1, \ldots, a_j)$ y $(a_1, \ldots, a_j)$ es l.i., tenemos $\dim(S_j) = j$.

Luego, como $S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j)$, obtenemos que $(b_1, \ldots, b_j)$ es l.i. y $b_j \neq 0_H$.

Demostración, paso de inducción, ortogonalidad

Por la propiedad principal de la proyección ortogonal,

$$b_j \perp \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Demostración, paso de inducción, ortogonalidad

Por la propiedad principal de la proyección ortogonal,

$$b_j \perp \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Además, por la hipótesis de inducción, $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una lista ortogonal.

Demostración, paso de inducción, ortogonalidad

Por la propiedad principal de la proyección ortogonal,

$$b_j \perp \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Además, por la hipótesis de inducción, $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una lista ortogonal.

Luego $(b_1, \ldots, b_j)$ es una lista ortogonal.

Demostración, paso de inducción, ortogonalidad

Por la propiedad principal de la proyección ortogonal,

$$b_j \perp \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Además, por la hipótesis de inducción, $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una lista ortogonal.

Luego $(b_1, \ldots, b_j)$ es una lista ortogonal.

Además, los vectores $b_1, \ldots, b_j$ son no nulos y $S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j)$.

Demostración, paso de inducción, ortogonalidad

Por la propiedad principal de la proyección ortogonal,

$$b_j \perp \ell(b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Además, por la hipótesis de inducción, $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ es una lista ortogonal.

Luego $(b_1, \ldots, b_j)$ es una lista ortogonal.

Además, los vectores $b_1, \ldots, b_j$ son no nulos y $S_j = \ell(b_1, \ldots, b_j)$.

Concluimos que $(b_1, \ldots, b_j)$ es una base ortogonal de S_j.

Corolario: el sentido geométrico de u_j y b_j

Corolario

En las condiciones del teorema,

$$b_j = a_j - u_j, \qquad \textit{donde} \qquad u_j := P_{S_{j-1}}(a_j).$$

En otras palabras, b_j es el complemento ortogonal del vector a_j respecto al subespacio generado por los vectores $a_1, \ldots, a_{j-1}$.

Corolario: el sentido geométrico de u_j y b_j

Corolario

En las condiciones del teorema,

$$b_j = a_j - u_j, \qquad \textit{donde} \qquad u_j := P_{S_{j-1}}(a_j).$$

En otras palabras, b_j *es el complemento ortogonal del vector* a_j *respecto al subespacio generado por los vectores* $a_1, \ldots, a_{j-1}$.

Notemos que $(a_1, \ldots, a_{j-1})$ es la base original de S_{j-1}.

Corolario: el sentido geométrico de u_j y b_j

Corolario

En las condiciones del teorema,

$$b_j = a_j - u_j, \qquad \textit{donde} \qquad u_j := P_{S_{j-1}}(a_j).$$

En otras palabras, b_j es el complemento ortogonal del vector a_j respecto al subespacio generado por los vectores $a_1, \ldots, a_{j-1}$.

Notemos que $(a_1, \ldots, a_{j-1})$ es la base original de S_{j-1}.

Sin embargo, para calcular los vectores $P_{S_{j-1}}(a_j)$ y b_j,
usamos la base ortogonal nueva $(b_1, \ldots, b_{j-1})$ del subespacio S_{j-1}.

Proceso de Gram–Schmidt con normalización

Corolario

Sean $a_1, \ldots, a_m \in H$ *tales que la lista* $(a_1, \ldots, a_m)$ *es linealmente independiente.*

Para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*, pongamos* $S_j := \ell(a_1, \ldots, a_j)$*.*

Construimos $b_1, \ldots, b_m$ *y* $q_1, \ldots, q_m$ *mediante las siguientes reglas:*

$$\boxed{b_j := a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle a_j, q_k \rangle \, q_k,} \qquad \boxed{q_j := \frac{b_j}{\|b_j\|}.}$$

Entonces para cada j *en* $\{1, \ldots, m\}$*,* $\quad (q_1, \ldots, q_j)$ *es una base ortonormal de* S_j*.*

Ejemplo muy pequeño

En el espacio $\mathbb{C}^2$ consideramos los vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (a_1, a_2).
- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (v_1, v_2).

Ejemplo muy pequeño

En el espacio $\mathbb{C}^2$ consideramos los vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (a_1, a_2).
- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (v_1, v_2).

Aunque $\{a_1, a_2\} = \{v_1, v_2\}$, el algoritmo da resultados diferentes.

Ejemplo muy pequeño

En el espacio $\mathbb{C}^2$ consideramos los vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (a_1, a_2).
- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (v_1, v_2).

Aunque $\{a_1, a_2\} = \{v_1, v_2\}$, el algoritmo da resultados diferentes.

Conclusión: el resultado depende del orden de los vectores.

Ejemplo muy pequeño

En el espacio $\mathbb{C}^2$ consideramos los vectores

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad\qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (a_1, a_2).
- Aplicar el proceso de ortogonalización a la lista (v_1, v_2).

Aunque $\{a_1, a_2\} = \{v_1, v_2\}$, el algoritmo da resultados diferentes.

Conclusión: el resultado depende del orden de los vectores.

En otras palabras, el algoritmo de Gram–Schmidt se aplica a una lista de vectores, no a un conjunto de vectores.

Programación del proceso de Gram–Schmidt

En algún lenguaje de programación escribir una función
cuyo argumento es una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $1 \leq m \leq n$, y el resultado es una matriz $Q \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Programación del proceso de Gram–Schmidt

En algún lenguaje de programación escribir una función
cuyo argumento es una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $1 \leq m \leq n$, y el resultado es una matriz $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Tratamos las columnas de A como vectores $a_1, \ldots, a_m$
y las columnas de Q como vectores $q_1, \ldots, q_m$.

Programación del proceso de Gram–Schmidt

En algún lenguaje de programación escribir una función
cuyo argumento es una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $1 \le m \le n$, y el resultado es una matriz $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Tratamos las columnas de A como vectores $a_1, \ldots, a_m$
y las columnas de Q como vectores $q_1, \ldots, q_m$.

Para la comprobación, se recomienda generar A como una matriz pseudoaleatoria
(casi siempre sus columnas serán linealmente independientes).

Programación del proceso de Gram–Schmidt

En algún lenguaje de programación escribir una función
cuyo argumento es una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $1 \le m \le n$, y el resultado es una matriz $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Tratamos las columnas de A como vectores $a_1, \ldots, a_m$
y las columnas de Q como vectores $q_1, \ldots, q_m$.

Para la comprobación, se recomienda generar A como una matriz pseudoaleatoria
(casi siempre sus columnas serán linealmente independientes).

Se recomienda verificar que las columnas de Q son ortonormales
y los rangos de las matrices Q y $[A, Q]$ son iguales a m:

$$Q^*Q = I_m, \qquad \mathrm{r}(Q) = m, \qquad \mathrm{r}([A, Q]) = m.$$

Ejemplo: polinomios de Legendre

En el espacio $L^2((-1,1)\,\mathrm{d}x)$, aplicar el proceso de ortogonalización a los monomios

$$a_0(x) = x^0, \qquad a_1(x) = x^1, \qquad a_2(x) = x^2, \qquad a_3(x) = x^3.$$

Ejemplo: polinomios de Legendre

En el espacio $L^2((-1,1)\,\mathrm{d}x)$, aplicar el proceso de ortogonalización a los monomios

$$a_0(x) = x^0, \qquad a_1(x) = x^1, \qquad a_2(x) = x^2, \qquad a_3(x) = x^3.$$

Sugerencia: previamente calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Ejemplo: polinomios de Laguerre

En el espacio $L^2((0,+\infty)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x)$, aplicar el proceso de ortogonalización a los monomios

$$a_0(x) = x^0, \qquad a_1(x) = x^1, \qquad a_2(x) = x^2, \qquad a_3(x) = x^3.$$

Ejemplo: polinomios de Laguerre

En el espacio $L^2((0,+\infty)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x)$, aplicar el proceso de ortogonalización a los monomios

$$a_0(x) = x^0, \qquad a_1(x) = x^1, \qquad a_2(x) = x^2, \qquad a_3(x) = x^3.$$

Sugerencia: previamente calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^k \,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Ejemplo: polinomios de Hermite

En el espacio $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)$, aplicar el proceso de ortogonalización a los monomios

$$a_0(x) = x^0, \qquad a_1(x) = x^1, \qquad a_2(x) = x^2, \qquad a_3(x) = x^3.$$

Ejemplo: polinomios de Hermite

En el espacio $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x)$, aplicar el proceso de ortogonalización a los monomios

$$a_0(x) = x^0, \qquad a_1(x) = x^1, \qquad a_2(x) = x^2, \qquad a_3(x) = x^3.$$

Sugerencia: previamente calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, x^k \,\mathrm{d}x,$$

usando la definición de la función Gamma y sus propiedades básicas.