El teorema de Gelfand sobre el espectro (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

14 de mayo de 2022

Objetivos

Sabemos: si V es un espacio de Banach y $A\colon V \to V$ es un operador lineal acotado, entonces su espectro $\mathrm{sp}(A)$ es compacto.

Objetivos

Sabemos: si V es un espacio de Banach y $A\colon V \to V$ es un operador lineal acotado, entonces su espectro $\operatorname{sp}(A)$ es compacto.

Vamos a demostrar el teorema de Gelfand:

$$\operatorname{sp}(A) \neq \emptyset.$$

Objetivos

Sabemos: si V es un espacio de Banach y $A\colon V \to V$ es un operador lineal acotado, entonces su espectro $\operatorname{sp}(A)$ es compacto.

Vamos a demostrar el teorema de Gelfand:

$$\operatorname{sp}(A) \neq \emptyset.$$

La demostración es muy breve, pero requiere varias herramientas.

Plan

El grupo de los operadores invertibles (repaso)

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$.

El grupo de los operadores invertibles (repaso)

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$.

$\mathcal{B}(V) :=$ el álgebra de los operadores lineales acotados $V \to V$.

El grupo de los operadores invertibles (repaso)

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$.

$\mathcal{B}(V) :=$ el álgebra de los operadores lineales acotados $V \to V$.

$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(V)) :=$ el grupo de los operadores invertibles.

El grupo de los operadores invertibles (repaso)

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$.

$\mathcal{B}(V) :=$ el álgebra de los operadores lineales acotados $V \to V$.

$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V)) :=$ el grupo de los operadores invertibles.

Sabemos que $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(V))$ es abierto.

El grupo de los operadores invertibles (repaso)

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$.

$\mathcal{B}(V) :=$ el álgebra de los operadores lineales acotados $V \to V$.

$\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(V)) :=$ el grupo de los operadores invertibles.

Sabemos que $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(V))$ es abierto.

Notemos que si $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(V))$, entonces $T \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$.

Plan

El espectro del operador lineal acotado (repaso)

Dado A en $\mathcal{B}(V)$,

$$\operatorname{sp}(A) :=$$

El espectro del operador lineal acotado (repaso)

Dado A en $\mathcal{B}(V)$,

$$\operatorname{sp}(A) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda I - A \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(A)) \Big\}.$$

El espectro del operador lineal acotado (repaso)

Dado A en $\mathcal{B}(V)$,

$$\operatorname{sp}(A) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \quad \lambda I - A \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(A))\Big\}.$$

Sabemos que $\operatorname{sp}(A)$ es cerrado y acotado:

$$\operatorname{sp}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \le \|A\|\}.$$

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, se define $R_A \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) :=$$

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, se define $R_A\colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{sp}(A) \to \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) \coloneqq (\lambda I - A)^{-1}.$$

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, se define $R_A \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Sabemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, se define $R_A\colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) \coloneqq (\lambda I - A)^{-1}.$$

Sabemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Sabemos que R_A es holomorfa, y su derivada es $-R_A^2$.

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, se define $R_A \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Sabemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Sabemos que R_A es holomorfa, y su derivada es $-R_A^2$.
Esto significa que para cada λ en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A)$,

$$\lim_{\xi \to \lambda} \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) =$$

La función resolvente, repaso

Dado A en $\mathcal{B}(V)$, se define $R_A \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$,

$$R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Sabemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0.$$

Sabemos que R_A es holomorfa, y su derivada es $-R_A^2$.
Esto significa que para cada λ en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A)$,

$$\lim_{\xi \to \lambda} \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -R_A(\lambda)^2.$$

Plan

Corolario del teorema de Hahn–Banach, repaso

Dado un espacio vectorial normado E y un vector $a \in E \setminus \{0_E\}$, existe φ en $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(a) = \|a\|$.

Plan

Funciones continuas que tienen un límite finito en el infinito

Proposición

Sea $g \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y sea $\xi \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = \xi.$$

Entonces g es acotada.

Demostración: ejercicio.

Paso 1. Usando la hipótesis que $\lim_{z \to \infty} g(z) = \xi$,

encontrar $R > 0$ tal que $|g(z)| \leq |\xi| + 1$ para $|z| > R$.

Paso 2. Usando la compacidad del disco cerrado $\operatorname{clos}(R\mathbb{D})$,

demostrar que g es acotada en $\operatorname{clos}(R\mathbb{D})$.

Plan

El teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

El teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

Idea de demostración. Como g es holomorfa, también es analítica:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

El teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

Idea de demostración. Como g es holomorfa, también es analítica:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Los coeficientes a_k se pueden encontrar por la fórmula integral de Cauchy:

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{g(z)\,\mathrm{d}z}{z^{k+1}}.$$

El teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

Idea de demostración. Como g es holomorfa, también es analítica:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Los coeficientes a_k se pueden encontrar por la fórmula integral de Cauchy:

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{g(z)\,\mathrm{d}z}{z^{k+1}}.$$

Como g es acotada, $\quad |a_k| \le r \cdot \dfrac{\|g\|_{\text{sup}}}{r^{k+1}}.$

El teorema de Liouville sobre funciones holomorfas enteras acotadas

Sea $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Entonces g es una constante.

Idea de demostración. Como g es holomorfa, también es analítica:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Los coeficientes a_k se pueden encontrar por la fórmula integral de Cauchy:

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{g(z)\,\mathrm{d}z}{z^{k+1}}.$$

Como g es acotada, $\quad |a_k| \le r \cdot \dfrac{\|g\|_{\mathrm{sup}}}{r^{k+1}}.\quad$ Aplicamos $\lim\limits_{r\to+\infty}$ y obtenemos $a_k = 0$ para $k \ge 1$.

Plan

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\mathrm{sp}(A) \neq \emptyset.$$

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\operatorname{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\operatorname{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

La demostración es por reducción al absurdo.

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\operatorname{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

La demostración es por reducción al absurdo.

Suponemos que $\operatorname{sp}(A) = \emptyset$. Vamos a llegar a una contradicción.

Teorema

Sea V un espacio de Banach, $V \neq \{0_V\}$, $A \in \mathcal{B}(V)$. Entonces

$$\mathrm{sp}(A) \neq \emptyset.$$

El teorema fue demostrado por Izrail Moiséyevich Gelfand (1913–2009).

La demostración es por reducción al absurdo.

Suponemos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Vamos a llegar a una contradicción.

Idea: aplicar el teorema de Liouville a la función $\varphi \circ R_A$, donde $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en $\mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \to \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \to \lambda} \varphi \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -\varphi(R_A(\lambda)^2).$$

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en $\mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \to \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \to \lambda} \varphi \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -\varphi(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = 0$.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en $\mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \to \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \to \lambda} \varphi \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -\varphi(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim\limits_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = 0$.
En particular, esto implica que g es acotada.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en $\mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \to \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \to \lambda} \varphi\left(\frac{1}{\xi - \lambda}(R_A(\xi) - R_A(\lambda))\right) = -\varphi(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim\limits_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = 0$.
En particular, esto implica que g es acotada.

Por el teorema de Liouville, g es la constante 0.

Demostración

Supongamos que $\mathrm{sp}(A) = \emptyset$. Entonces el dominio de R_A es $\mathbb{C}$.

Notamos que $R_A(0) \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Por Hahn–Banach, encontramos $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(V), \mathbb{C})$ tal que

$$\varphi(R_A(0)) \neq 0.$$

Pongamos $g := \varphi \circ R_A$. Entonces g es holomorfa en $\mathbb{C}$:

$$\lim_{\xi \to \lambda} \frac{g(\xi) - g(\lambda)}{\xi - \lambda} = \lim_{\xi \to \lambda} \varphi \left(\frac{1}{\xi - \lambda} (R_A(\xi) - R_A(\lambda)) \right) = -\varphi(R_A(\lambda)^2).$$

Además, como $\lim_{\lambda \to \infty} \|R_A(\lambda)\| = 0$, tenemos $\lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = 0$.
En particular, esto implica que g es acotada.

Por el teorema de Liouville, g es la constante 0. En particular, $g(0) = 0$. Contradicción.