Teorema de Gelfand y Mazur

1 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con identidad e. Definimos $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}$,*

$$\Phi(\lambda) \coloneqq \lambda e \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Entonces, Φ es un monomorfismo de álgebras complejas con identidad.

Demostración. Se sigue fácilmente de las propiedades de multiplicación por escalares. □

2 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e. Entonces, la función $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, definida como en la Proposición 1, es una isometría.*

Demostración. Ya sabemos que Φ es lineal. Por eso es suficiente probar que Φ preserva la norma. Para cada λ en $\mathbb{C}$,

$$\|\Phi(\lambda)\| = \|\lambda e\| = |\lambda|\,\|e\| = |\lambda|. \qquad \square$$

En forma breve, el siguiente teorema dice que cada álgebra de Banach que es álgebra de división, es isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.

3 Teorema (Gelfand–Mazur)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e tal que $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Entonces, la función $\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, definida mediante la regla*

$$\Phi(\lambda) \coloneqq \lambda e \qquad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

es un isomorfismo isométrico de álgebras de Banach con identidad.

Demostración. Por las Proposiciones 1 y 2, ya sabemos que Φ es un homomorfismo de álgebras con identidad y una isometría. Hay que demostrar que Φ es suprayectiva.

Sea $x \in \mathcal{A}$. Elegimos $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$. Como $\lambda e - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, tenemos $\lambda e - x = 0_{\mathcal{A}}$, así que $x = \lambda e$. □