Transformada de Fourier, traslaciones y dilataciones

Objetivos. Estudiar cómo interactúa la transformada de Fourier con traslaciones y dilataciones.

En este curso usamos definimos la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera (a veces se utilizan otros coeficientes):

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Proposición 1 (la transformada de Fourier y la reflexión)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla*

$$g(x) := f(-x).$$

Entonces para cada ξ en $\mathbb{R}$

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi).$$

Demostración. Escribimos la definición de $\widehat{g}(\xi)$ y en la integral hacemos el cambio de variable $y = -x$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,y(-\xi)}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}(-\xi). \qquad \square$$

Corolario 2 (la transformada de Fourier y la paridad)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Supongamos que f es par, esto es, $f(x) = f(-x)$ para casi todo x en $\mathbb{R}$. Entonces $\widehat{f}(-\xi) = \widehat{f}(\xi)$ para todo ξ en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Aplicamos la Proposición 1 con $g = f$. $\square$

Proposición 3 (la transformada de Fourier y la conjugación)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla*

$$g(x) := \overline{f(x)}.$$

Entonces para cada ξ en $\mathbb{R}$

$$\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x(-\xi)}}\,\mathrm{d}x = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \qquad \square$$

Corolario 4 (la transformada de Fourier de funciones real-valuadas)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Entonces para cada ξ en $\mathbb{R}$*

$$\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Demostración. Aplicamos la Proposición 3 con $g = f$. $\square$

Proposición 5 (la transformada de Fourier y la dilatación)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y sea* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Definimos* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *mediante la regla*

$$g(x) := f(\lambda x).$$

Entonces para cada ξ *en* $\mathbb{R}$

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Demostración. Escribimos la definición de $\widehat{g}(\xi)$ y en la integral hacemos el cambio de variable $y = \lambda x$. Notemos que $x = y/\lambda$, el valor absoluto del jacobiano es $1/|\lambda|$, y

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,y\xi/\lambda}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right). \qquad \square$$

En el lenguaje de análisis de señales, la siguiente proposición se llama “la transformada de Fourier y desplazamientos de tiempo”.

Proposición 6 (la transformada de Fourier y la traslación)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y sea* $a \in \mathbb{R}$. *Definimos* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *mediante la regla*

$$g(x) := f(x - a).$$

Entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a\xi}\ \widehat{f}(\xi).$$

Demostración. Escribimos la definición de $\widehat{g}(\xi)$, en la integral hacemos el cambio de variable $y = x - a$ y aplicamos la propiedad principal de la función exponencial:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x - a)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}(y+a)\xi}\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,a\xi}\ \widehat{f}(\xi). \qquad \square$$

Proposición 7 (la transformada de Fourier y un desplazamiento de frecuencias)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y sea* $a \in \mathbb{R}$. *Definimos* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *mediante la regla*

$$g(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,ax}\ f(x).$$

Entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a).$$

Demostración. Usamos la propiedad principal de la función exponencial:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,ax}\ \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}(\xi-a)x}\ \mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi - a). \qquad \square$$