

Transformada integral de Fourier sobre el grupo de los números reales

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de la transformada de Fourier de funciones integrables en \mathbb{R} .

En estos apuntes denotamos por μ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Definición 1 (la transformada de Fourier de una función integrable). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotemos por $\mathcal{F}f$ o por \widehat{f} a la función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) d\mu(x).$$

Observación 2. Denotamos por $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ al espacio prenormado de las funciones Lebesgue integrables y por $L^1(\mathbb{R})$ al espacio normado de sus clases de equivalencia. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $f \sim g$, es decir, f y g son iguales μ -c.t.p., entonces para cada ξ en \mathbb{R} tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} g(x) d\mu(x).$$

Por lo tanto, podemos pensar que la transformada de Fourier \mathcal{F} está bien definida en clases de equivalencia, y la definición 1 es consistente. En lo que sigue, pasamos libremente de funciones integrables a sus clases de equivalencia, es decir, de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a $L^1(\mathbb{R})$.

Proposición 3 (la transformada de Fourier de una función integrable es acotada). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Más aún, para cada ξ en \mathbb{R} ,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1.$$

Demostración.

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x)| d\mu(x) = \|f\|_1. \quad \square$$

Corolario 4. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para cada ξ en \mathbb{R} tenemos

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_1.$$

Demostración. Aplicamos la Proposición 3 a la función $f - g$. □

Observación 5. El Corolario 4 nos dice que cuando aproximamos f por g en el sentido de la norma $\|\cdot\|_1$, la transformada de Fourier $\mathcal{F}f$ se aproxima por $\mathcal{F}g$ en el sentido de la norma uniforme. Este hecho simple se puede usar para demostrar algunas propiedades de $\mathcal{F}f$ primero para las funciones f “buenas” o “simples” en algún sentido, y luego para las funciones integrables generales.

Recordemos una propiedad conocida de funciones Lebesgue integrables en \mathbb{R} .

Lema 6. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $L > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Demostración. Pongamos $g_k = f \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus (-k, k)}$. Entonces la sucesión $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tiende a la función constante cero de manera puntual. Además, $|g_k| \leq |f|$ para cada k , y la función $|f|$ es integrable. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |g_k| \, d\mu = 0.$$

Encontramos k tal que $\int_{\mathbb{R}} |g_k| \, d\mu < \varepsilon$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-k, k)} |f| \, d\mu < \varepsilon,$$

ponemos $L = k$ y obtenemos el resultado requerido. □

Lema 7. Para cada x en \mathbb{R} ,

$$|e^{ix} - 1| = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Demostración. Factorizamos $e^{ix/2}$:

$$e^{ix} - 1 = e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = e^{ix/2} \left(2i \sin \frac{x}{2} \right).$$

Sacando el valor absoluto obtenemos el resultado. □

Lema 8. Para cada x en \mathbb{R} ,

$$|e^{ix} - 1| \leq |x|.$$

Demostración 1. Sale del Lema 7 aplicando la desigualdad $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$ con $\alpha = x/2$. □

Demostración 2. Notamos que la derivada de la función $t \mapsto e^{it}$ es $t \mapsto ie^{it}$. Dado $x > 0$, aplicamos el segundo teorema fundamental de cálculo:

$$\int_0^x ie^{it} \, dt = e^{ix} - 1.$$

Sacamos el valor absoluto de ambos lados y acotamos el valor absoluto de la integral por la integral del valor absoluto:

$$|e^{ix} - 1| \leq \left| \int_0^x ie^{it} \, dt \right| \leq \int_0^x |ie^{it}| \, dt \leq \int_0^x 1 \, dt = x.$$

Para $x < 0$, podemos integrar de x a 0 o aplicar la paridad. □

Proposición 9. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces la función \widehat{f} es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que para cada cualesquier $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, si $|\xi - \eta| \leq \delta$, entonces $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \varepsilon$. Pongamos $h = \xi - \eta$. Notamos que

$$|e^{-2\pi i \xi x} - e^{-2\pi i \eta x}| = |e^{-2\pi i \eta x}| |e^{-2\pi i h x} - 1|.$$

Luego

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi i \xi x} - e^{-2\pi i \eta x}| |f(x)| d\mu(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi i h x} - 1| |f(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Para cualquier $L > 0$, la última integral se puede dividir en dos partes de la siguiente manera:

$$\int_{(-L, L)} |e^{-2\pi i h x} - 1| |f(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} |e^{-2\pi i h x} - 1| |f(x)| d\mu(x).$$

En la segunda integral no podemos controlar el valor del producto $2\pi h x$, por eso acotamos $|e^{-2\pi i h x} - 1|$ de manera trivial:

$$|e^{-2\pi i h x} - 1| \leq |e^{-2\pi i h x}| + 1 = 2.$$

En la primera integral acotamos $|e^{-2\pi i h x} - 1|$ de otra manera, usando el Lema 8 y la desigualdad $|x| \leq L$:

$$|e^{-2\pi i h x} - 1| \leq |2\pi i h x| = 2\pi h |x| \leq 2\pi h L.$$

Luego

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq |h| 2\pi L \int_{(-L, L)} |f(x)| d\mu(x) + 2 \int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} |f(x)| d\mu(x).$$

Elegimos L como en el Lema 6, con $\varepsilon/4$ en vez de ε . Obtenemos

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq |h| 2\pi L \|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(2\pi L \|f\|_1 + 1)}.$$

Entonces para $|h| \leq \delta$ se cumple la desigualdad $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \varepsilon$. □

Proposición 10 (la fórmula de reciprocidad de Fourier). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) d\mu(x).$$

Demostración. Usamos el teorema de Tonelli para calcular la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |g(\xi) f(x) e^{-2\pi i \xi x}| d(\mu \times \mu)(x, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\xi)| |f(x)| d\mu(x) \right) d\mu(\xi) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\xi)| d\mu(\xi) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) \right) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Ahora podemos considerar las integrales similares sin el valor absoluto y usar el teorema de Fubini para cambiar el orden de las integrales:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\mu(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$