

# Motivación de la transformada de Fourier

Las funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas mediante las reglas

$$x \mapsto \cos(ax), \quad x \mapsto \sin(ax), \quad (1)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ , son oscilaciones elementales (reales) en la recta real. Estas funciones surgen de manera natural en la solución de varios problemas (por ejemplo, en el estudio del oscilador armónico y en el estudio del movimiento de una cuerda), son fáciles de calcular (mediante sus series de Taylor) y tienen muchas propiedades buenas: son periódicas e infinitamente derivables. Además, hay fórmulas simples para sumar y multiplicar funciones de este tipo.

Aún más cómodo es trabajar con las funciones de la forma

$$x \mapsto e^{iax}, \quad (2)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ . Las funciones de la forma (2) describen el movimiento circular, y las funciones (1) se obtienen como su parte real e imaginaria. En palabras más cotidianas, cos y sen son las imágenes de frente y de perfil al observar el movimiento circular.

Para simplificar algunas fórmulas, vamos a poner el factor  $2\pi$  en el exponente. Para cada  $\xi$  en  $\mathbb{R}$ , definimos  $\varphi_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mediante la regla

$$\varphi_\xi(x) := e^{2\pi i \xi x}. \quad (3)$$

Para cada  $\xi$  en  $\mathbb{R}$ , la función (3) toma valores en la circunferencia unitaria

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$$

y convierte la suma en el producto:

$$\varphi_\xi(x + y) = \varphi_\xi(x)\varphi_\xi(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

En otras palabras, la función  $\varphi_\xi$ , considerada con el contradominio  $\mathbb{T}$ , es un homomorfismo de grupos  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ . Además, esta función es continua.

Dado un grupo topológico  $G$ , los homomorfismos continuos  $G \rightarrow \mathbb{T}$  se llaman *caracteres* del grupo  $G$ . Con esta terminología, podemos decir que las funciones  $\varphi_\xi$ , con  $\xi$  en  $\mathbb{R}$ , son caracteres del grupo  $\mathbb{R}$ . De manera intuitiva, esto significa que las funciones  $\varphi_\xi$  son las “oscilaciones elementales” definidas en  $\mathbb{R}$ . Se puede demostrar que cualquier caracter del grupo  $\mathbb{R}$  es de la forma  $\varphi_\xi$  con algún  $\xi$  en  $\mathbb{R}$ .

El propósito fundamental de análisis armónico es aproximar una función dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  por una combinación lineal de oscilaciones elementales (caracteres). Dada  $f$ , queremos encontrar  $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}$  y  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$  tales que

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^m c_k e^{2\pi i \xi_k x}. \quad (4)$$

Resulta que estas sumas finitas no sirven mucho para aproximar algunas funciones buenas en toda la recta real. En vez de una suma finita se considera una integral. Además, en vez de una aproximación queremos una igualdad exacta:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (5)$$

Comparemos (5) con (4). En vez de una lista finita  $\xi_1, \dots, \xi_m$  tenemos una variable  $\xi$  que recorre toda la recta, y para cada valor de  $\xi$  tendremos un coeficiente  $g(\xi)$  que depende de  $\xi$ .

Resulta que si  $f$  es bastante buena (por ejemplo,  $f$  es infinitamente derivable, y todas sus derivadas decaen rápidamente en el infinito), entonces  $f$  se puede escribir en la forma (5), y la función  $g$  se puede calcular mediante la siguiente regla:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (6)$$

La fórmula (6) parece mucho a la fórmula (5); solamente el signo en el exponente es diferente. La función  $g$  definida mediante (6) se llama la *transformada de Fourier* de  $f$  y se denota por  $\hat{f}$  o por  $\mathcal{F}(f)$ . En otras palabras,

$$(\mathcal{F}(f))(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (7)$$

Entonces, (5) se escribe de la siguiente manera:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad (8)$$

y se llama la *fórmula de inversión de Fourier*. Una parte del análisis armónico consiste en establecer buenas condiciones suficientes (sobre la función  $f$ ) para que la función  $\hat{f}$  esté bien definida y para que se cumpla la fórmula (8).

Notemos que de cierto punto de vista, la fórmula más útil en este tema es la representación (8), y el sentido de la transformada de Fourier (7) consiste en proporcionarnos los coeficientes ( $g(\xi)$  o  $c_k$ ) de la descomposición de  $f$  en oscilaciones elementales (caracteres).

Luego veremos que la transformada de Fourier interactúa muy bien con las traslaciones y con los operadores invariantes bajo traslaciones; en particular, con la convolución y con la derivación. Por eso la transformada de Fourier es una herramienta estándar para resolver o simplificar algunos tipos de ecuaciones integrales (de tipo convolución) y algunos tipos de ecuaciones diferenciales (especialmente, las ecuaciones con coeficientes constantes).