Motivación de la transformada de Fourier

Las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas mediante las reglas

$$x \mapsto \cos(ax), \qquad x \mapsto \operatorname{sen}(ax), \tag{1}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, son oscilaciones elementales en la recta real. Estas funciones surgen de manera natural en la solución de varios problemas (por ejemplo, en el estudio del oscilador armónico y en el estudio del movimiento de una cuerda), son fáciles de calcular (mediante sus series de Taylor) y tienen muchas propiedades buenas: son periódicas e infinitamente derivables. Además, hay fórmulas simples para sumar y multiplicar funciones de este tipo.

Aún más cómodo es trabajar con las funciones de la forma

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, ax}, \tag{2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Las funciones de la forma (2) describen el movimiento circular, y las funciones (1) se obtienen como su parte real e imaginaria. En palabras más cotidianas, cos y sen son las imágenes de frente y de perfil al observar el movimiento circular.

Para simplificar algunas fórmulas, se pone un factor 2π en el exponente. Para cada ξ en $\mathbb{R}$, definimos $\varphi_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\, \mathrm{i}\, \xi x}. \tag{3}$$

Para cada ξ en $\mathbb{R}$, la función (3) toma valores en la circunferencia unitaria

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| = 1\}$$

y convierte la suma en el producto:

$$\varphi_\xi(x+y) = \varphi_\xi(x)\varphi_\xi(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

En otras palabras, la función φ_ξ, considerada con el contradominio $\mathbb{T}$, es un homomorfismo de grupos $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$. Además, esta función es continua.

Dado un grupo topológico G, los homomorfismos continuos $G \to \mathbb{T}$ se llaman *caracteres* del grupo G. Con esta terminología, podemos decir que las funciones φ_ξ con ξ en $\mathbb{R}$ son caracteres del grupo $\mathbb{R}$. De manera intuitiva, esto significa que las funciones φ_ξ son "oscilaciones elementales" definidas en $\mathbb{R}$. Se puede demostrar que cualquier caracter del grupo $\mathbb{R}$ es de la forma φ_ξ con algún ξ en $\mathbb{R}$.

El propósito fundamental de análisis armónico es aproximar una función dada $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por una combinación lineal de oscilaciones elementales (caracteres). Dada f, queremos encontrar $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ y $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{m} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi\, \mathrm{i}\, \xi_k x}. \tag{4}$$

Más general, en vez de una suma finita puede ser una integral, y en vez de una aproximación queremos una igualdad exacta:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\ \mathrm{d}\xi. \tag{5}$$

Comparemos (5) con (4). En vez de una lista finita $\xi_1, \ldots, \xi_m$ tenemos una variable ξ que recorre toda la recta, y para cada valor de ξ tendremos un coeficiente $g(\xi)$ que depende de ξ.

Resulta que si f es bastante buena (por ejemplo, f es infinitamente derivable, y todas sus derivadas decaen rápidamente en el infinito), entonces f se puede escribir en la forma (5), y la función g se puede calcular mediante la siguiente regla:

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\ \mathrm{d}x. \tag{6}$$

La función g definida mediante (6) se llama la *transformada de Fourier* de f y se denota por $\widehat{f}$ o por $\mathcal{F}(f)$. En otras palabras,

$$(\mathcal{F}(f))(\xi) = \widehat{f}(\xi) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\ \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Entonces (5) se escribe de la siguiente manera:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\ \mathrm{d}\xi, \tag{8}$$

y se llama la *fórmula de inversión de Fourier*. Una parte del análisis armónico consiste en establecer buenas condiciones suficientes (sobre f) para que la función $\widehat{f}$ esté bien definida y para que se cumpla la fórmula (8).

Notemos que de cierto punto de vista, el sentido de la transformada de Fourier (7) consiste en proporcionarnos los coeficientes ($g(\xi)$ o c_k) de la descomposición de f en oscilaciones elementales (caracteres).

Luego veremos que la transformada de Fourier interactúa muy bien con las traslaciones y con los operadores invariantes bajo traslaciones, en particular, con la convolución y con la derivación. Por eso la transformada de Fourier es una herramienta estándar para resolver o simplificar algunos tipos de ecuaciones integrales (de tipo convolución) y algunos tipos de ecuaciones diferenciales (especialmente las ecuaciones con coeficientes constantes).