Transformada de Fourier y transformadas simples de la función

En este tema suponemos que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotamos por $\widehat{f}$ o por $\mathcal{F}(f)$ la transformada de Fourier de f, definida como la función $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que actúa mediante la regla

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi x}\, f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Proposición 1 (la transformada de Fourier es lineal)**.** *Sean* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2), \qquad \mathcal{F}(\lambda f_1) = \lambda \mathcal{F}(f_1).$$

Demostración. Sale de la propiedad lineal de la integral. □

Proposición 2 (la transformada de Fourier y los desplazamientos de la función)**.** *Sean* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. *Definimos* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *como* $g(x) \coloneqq f(x - s)$. *Entonces*

$$\widehat{g}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi s}\, \widehat{f}(\xi).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x - s$, luego aplicamos la propiedad principal de la función exponencial y la propiedad homogénea de la integral:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi x}\, \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi (y+s)}\, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi s} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi y}\, \mathrm{d}\mu(y) = \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$
□

Proposición 3 (la transformada de Fourier de la función reflejada)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Definimos* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *como* $g(x) \coloneqq f(-x)$. *Entonces*

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = -x$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(-x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi\xi x}\, \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, 2\pi(-\xi) y}\, \mathrm{d}\mu(y) = \widehat{f}(-\xi).$$
□

Proposición 4 (la transformada de Fouriere de la función dilatada)**.** *Sean* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. *Definimos* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *como* $g(x) = f(x/\lambda)$. *Entonces*

$$\widehat{g}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x/\lambda$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\, \mathrm{d}\mu(x) = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\lambda\xi y}\, \mathrm{d}\mu(y) = \lambda \widehat{f}(\xi). \qquad \square$$

Proposición 5 (la transformada de Fourier y la modulación de la función)**.** *Sean* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\eta \in \mathbb{R}$, $g(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\eta x} f(x)$. *Entonces*

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi(\xi-\eta)x} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \widehat{f}(\xi - \eta). \qquad \square$$

Proposición 6 (la transformada de Fourier de la función conjugada)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Pongamos* $g \coloneqq \overline{f}$. *Entonces*

$$\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\xi x}\, \overline{f(x)}\, \mathrm{d}\mu(x) = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi(-\xi)x}\, \mathrm{d}\mu(x)} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \qquad \square$$

Proposición 7 (la transformada de Fourier de la parte real y de la parte imaginaria de una función)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Pongamos* $u \coloneqq \mathrm{Re}(f)$, $v \coloneqq \mathrm{Im}(f)$. *Entonces*

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{2}\big(\widehat{f}(\xi) + \overline{\widehat{f}(-\xi)}\big), \qquad \widehat{v}(\xi) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(\widehat{f}(\xi) - \overline{\widehat{f}(-\xi)}\big).$$

Demostración. Expresamos u y v a través de f y $\overline{f}$:

$$u = \frac{1}{2}\big(f + \overline{f}\big), \qquad v = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\big(f - \overline{f}\big).$$

Aplicamos la Proposición 6 y obtenemos el resultado. $\square$

Los resultados de este tema se pueden resumir en la siguiente tabla.

parámetro	$g(x)$	$\widehat{g}(\xi)$
$s \in \mathbb{R}$	$f(x - s)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi s\xi}\, \widehat{f}(\xi)$
	$f(-x)$	$\widehat{f}(-\xi)$
$\lambda > 0$	$f(x/\lambda)$	$\lambda \widehat{f}(\lambda\xi)$
$\eta \in \mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\eta x} f(x)$	$\widehat{f}(\xi - \eta)$
	$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}(-\xi)}$