

Transformada de Fourier y transformadas simples de la función

En este tema suponemos que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Denotamos por \hat{f} o por $\mathcal{F}(f)$ la transformada de Fourier de f , definida como la función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que actúa mediante la regla

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) d\mu(x) \quad (\xi \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Observación 1. Expliquemos la definición de la transformada de Fourier de manera más detallada. Dada una función h medible y Lebesgue integrable (es decir, $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$), su transformada de Fourier \hat{h} se define por la fórmula similar a (1). Si h_1 y h_2 son dos funciones del espacio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, iguales casi en todas partes (c.t.p.), entonces es fácil ver que sus transformadas de Fourier coinciden: $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$. Por lo tanto, podemos pensar que la transformada de Fourier se define en *clases de funciones*, es decir, en el espacio $L^1(\mathbb{R})$. En lo que sigue, casi siempre pasamos libremente de funciones a sus clases de equivalencia.

Proposición 2 (la transformada de Fourier es lineal). Sean $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2), \quad \mathcal{F}(\lambda f_1) = \lambda \mathcal{F}(f_1).$$

Demostración. Sale de la propiedad lineal de la integral. □

Proposición 3 (la transformada de Fourier y los desplazamientos de la función). Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. Definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como $g(x) := f(x - s)$. Entonces,

$$\hat{g}(\xi) = e^{-i2\pi\xi s} \hat{f}(\xi).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x - s$, luego aplicamos la propiedad principal de la función exponencial y la propiedad homogénea de la integral:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - s) e^{-i2\pi\xi x} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\xi(y+s)} d\mu(y) \\ &= e^{-i2\pi\xi s} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\xi y} d\mu(y) = e^{-i2\pi\xi s} \hat{f}(\xi). \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 4 (la transformada de Fourier de la función reflejada). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como $g(x) := f(-x)$. Entonces,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(-\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = -x$:

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(-x) e^{-i2\pi\xi x} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi(-\xi)y} d\mu(y) = \hat{f}(-\xi). \quad \square$$

Corolario 5. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ una función par:

$$f(-x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces, \widehat{f} también es par.

Demostración. Consideramos $g(x) := f(-x)$. Por la proposición anterior, para cada ξ en \mathbb{R} tenemos que $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$. Por otro lado, como $g = f$, $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. \square

Corolario 6. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ una función impar:

$$f(-x) = -f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces, \widehat{f} también es impar.

Observación 7. En los Corolarios 5 y 6, en vez de las funciones, podemos considerar clases de equivalencia. En otras palabras, suponer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y las igualdades $f(-x) = f(x)$ o $f(-x) = -f(x)$ se cumplan c.t.p.

Proposición 8 (la transformada de Fourier de la función dilatada). Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como $g(x) = f(x/\lambda)$. Entonces,

$$\widehat{g}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi).$$

Demostración. En la integral hacemos el cambio de variable $y = x/\lambda$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-i2\pi\xi x} d\mu(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i2\pi\lambda\xi y} d\mu(y) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi). \quad \square$$

Proposición 9 (la transformada de Fourier y la modulación de la función). Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\eta \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := e^{i2\pi\eta x} f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces,

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(\xi-\eta)x} f(x) d\mu(x) = \widehat{f}(\xi - \eta). \quad \square$$

Proposición 10 (la transformada de Fourier de la función conjugada). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pongamos $g := \overline{f}$. Entonces,

$$\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} \overline{f(x)} d\mu(x) = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi(-\xi)x} d\mu(x)} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \quad \square$$

Proposición 11 (la transformada de Fourier de la parte real y de la parte imaginaria de una función). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(f)$, $v := \operatorname{Im}(f)$. Entonces,

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\xi) + \overline{\hat{f}(-\xi)}), \quad \hat{v}(\xi) = \frac{1}{2i}(\hat{f}(\xi) - \overline{\hat{f}(-\xi)}).$$

Demostración. Expresamos u y v a través de f y \bar{f} :

$$u = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}).$$

Aplicamos la Proposición 10 y obtenemos el resultado. □

Corolario 12 (la transformada de Fourier de una función real). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ c.t.p. Entonces,

$$\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Los resultados de este tema se pueden resumir en la siguiente tabla.

| parámetro | $g(x)$ | $\hat{g}(\xi)$ |
|-----------------------|--------------------------|----------------------------------|
| $s \in \mathbb{R}$ | $f(x - s)$ | $e^{-i 2\pi s \xi} \hat{f}(\xi)$ |
| | $f(-x)$ | $\hat{f}(-\xi)$ |
| $\lambda > 0$ | $f(x/\lambda)$ | $\lambda \hat{f}(\lambda \xi)$ |
| $\eta \in \mathbb{R}$ | $e^{i 2\pi \eta x} f(x)$ | $\hat{f}(\xi - \eta)$ |
| | $\overline{f(x)}$ | $\overline{\hat{f}(-\xi)}$ |