# Transformada de Fourier y la derivada

**Proposición 1.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que la derivada $f'$ existe y pertenece a $L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$(\mathcal{F}f')(\xi) = 2\pi\,\mathrm{i}\,\xi \widehat{f}(\xi).$$

*Demostración.* Notemos que

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(z)\,dz.$$

Por lo tanto $f(x)$ tiene un límite $L$ cuando $x \to \infty$. Como $f$ es integrable, $L = 0$.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{|x|\leqslant M} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,dx.$$

Pongamos

$$g_\xi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}}{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}.$$

Entonces

$$\int_{-M}^{M} f(x) g'_\xi(x)\,dx = f(M)g(M) - f(-M)g(-M) - \int_{-M}^{M} f'(x)\,g_\xi(x)\,dx.$$

Pasando al límite cuando $M \to \infty$, obtenemos

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}\widehat{f'}(\xi).$$ □

**Corolario 2.** *En las condiciones de la proposición anterior,*

$$\lim_{\xi\to\infty} \xi \widehat{f}(\xi) = 0.$$

**Proposición 3.** *Supongamos que*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\,|f(x)|\,dx < +\infty.$$

*Entonces $\widehat{f}$ es derivable y*

$$\widehat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi\,\mathrm{i}\,x) f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,dx.$$

*Demostración.* Aplicar la regla de Leibniz–Lebesgue. □