Series de Fourier en L^2

Recordamos que el espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ está dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Para cada k en $\mathbb{Z}$ denotamos por φ_k a la k-ésima función básica de Fourier,

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

La sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Los coeficientes de Fourier de una función f se pueden escribir como

$$\widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k\rangle.$$

Ya sabemos que si $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ (y, más general, si $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$) y $\widehat{f}_k = 0$ para cada k, entonces f se anula casi en todas partes. Esto significa que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tiene propiedad total, y de aquí por la teoría general de espacios de Hilbert se deduce que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal. Escribamos los razonamientos correspondientes para nuestra situación particular.

Proposición 1 (Riesz–Fischer)**.** *Sea $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces existe una única función f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = a_k$ para cada k.*

Demostración. Sea

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

Entonces la sucesión $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy y existe f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $T_n \to f$ en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Consideramos los coeficientes de Fourier de f:

$$\widehat{f}_k = \langle f, \varphi_k\rangle = \langle f - T_n, \varphi_k\rangle + \langle T_n, \varphi_k\rangle.$$

Si $n \geqslant k$, entonces el último sumando es a_k. Luego

$$|\widehat{f}_k - a_k| = |\langle f - T_n, \varphi_k\rangle| \leqslant \|f - T_n\|_2.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ concluimos que $\widehat{f}_k = a_k$. □

Dada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, para cada n en $\mathbb{Z}$ denotemos por $S_n f$ a la n-ésima suma parcial de Fourier:

$$S_n f := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k \varphi_k.$$

Demostremos que las sumas parciales $S_n f$ aproximan f de mejor manera, en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{2,2\pi}$.

Proposición 2. *Sea $f \in L^2_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$. Entonces para cualquier g de la forma*

$$g(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$$

se tiene que

$$\|f - g\|_2^2 \geqslant \|f - S_n f\|_2^2.$$

La última expresión se puede escribir como

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k|^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_2^2 = \langle f - g, f - g\rangle &= \|f\|_2^2 - \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle + \|g\|_2^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} \left(\overline{\widehat{f}_k} a_k + \widehat{f}_k \overline{a_k} - |a_k|^2\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} |a_k - \widehat{f}_k|^2 + \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k|^2.
\end{aligned}$$

Si $g = S_n f$, entonces $a_k = \widehat{f}_k$ y la primera suma desaparece. □

Proposición 3 (identidad de Parseval)**.** *Sea $f \in L^2_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0$$

y

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2.$$

Demostración. De la proposición anterior obtenemos la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Mostremos que la sucesión $(S_n f)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. En efecto, si $m < n$, entonces

$$\|S_n f - S - m f\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\widehat{f}_k|^2.$$

El espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es completo, por eso existe una función $g \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - g\|_2 = 0.$$

Nos falta demostrar que $f = g$. Consideramos los coeficientes de Fourier de g:

$$\widehat{g}_k = \langle g, \varphi_k \rangle = \langle g - S_n f, \varphi_k \rangle + \langle S_n f, \varphi_k \rangle.$$

Si $n > k$, entonces el último sumando es $\widehat{f}_k$, y

$$\widehat{g}_k - \widehat{f}_k = \langle g - S_n f, \varphi_k \rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz obtenemos

$$|\widehat{g}_k - \widehat{f}_k| \leqslant \|g - S_n f\|_2.$$

Pasando al límite cuando n tiende a infinito concluimos que

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_k.$$

Por lo tanto, $g = f$, y $S_n f \to f$ en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Esto implica la convergencia de las normas:

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2,$$

lo cual es precisamente la identidad de Parseval. $\square$