

Matrix de Fourier, traslaciones y modulaciones

Objetivos. Mostrar que la matriz de Fourier (la transformada discreta cíclica de Fourier) convierte traslaciones en modulaciones y viceversa.

Prerrequisitos. Matriz de Fourier, grupo $G_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, matrices circulantes, matrices diagonales, teorema de convolución.

Repaso

En este tema, vamos a considerar varias matrices y su interacción. En vez de matrices, podríamos considerar transformaciones lineales del espacio $\mathbb{C}^n$.

Igual que en otros temas de esta unidad, suponemos que $n \in \mathbb{N}$, denotamos por ε_n la siguiente n -ésima raíz de la unidad:

$$\varepsilon_n := \exp \frac{2\pi i}{n},$$

y denotamos por F_n la matriz de Fourier:

$$F_n := [\varepsilon_n^{-jk}]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Sabemos que la matriz F_n es invertible y $F_n^{-1} = \frac{1}{n} F_n^*$.

En estos apuntes, en vez del grupo $\mathbb{Z}_n$, preferimos trabajar con el grupo G_n , definido como el conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ con la siguiente operación binaria:

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & a + b < n; \\ a + b - n, & a + b \geq n. \end{cases}$$

Sabemos que G_n es un grupo conmutativo. Dados r, s en G_n , existe un único elemento t en G_n tal que $s \oplus t = r$. Este elemento se denota por $r \ominus s$ y se puede calcular de la siguiente manera:

$$r \ominus s = \begin{cases} r - s, & s \leq r; \\ r - s + n, & s > r. \end{cases}$$

Denotamos por $\delta_{p,q}$ la delta de Kronecker. Para cada p en G_n , denotamos por $e_{n,p}$ al p -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$:

$$e_{n,p} := [\delta_{k,p}]_{k=0}^{n-1}.$$

Dados x, y en $\mathbb{C}^n$, denotamos por $x * y$ su convolución discreta cíclica:

$$(x * y)_j := \sum_{k=0}^{n-1} x_{j \ominus k} y_k \quad (j \in G_n).$$

La *matriz circulante* asociada a un vector a se define como

$$C(a) = [a_{j \ominus k}]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Hay una conexión simple entre las matrices circulantes y la convolución discreta cíclica: para cada a, x en $\mathbb{C}^n$,

$$C(a)x = a * x.$$

Matrices de traslación

Definición 1. Para cada p en G_n , denotamos por $T_{n,p}$ la siguiente *matriz de traslación cíclica*:

$$T_{n,p} = [\delta_{j,k \oplus p}]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Ejemplo 2. Para $n = 6$ y $p = 4$,

$$T_{n,p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema 3. Para cualesquiera j, k, p en G_n ,

$$\delta_{j,k \oplus p} = \delta_{j \ominus p, k} = \delta_{j \ominus k, p}. \quad (1)$$

Demostración. En efecto, como G_n es un grupo, se tienen las siguientes equivalencias:

$$j = k \oplus p \quad \Longleftrightarrow \quad j \ominus p = k \quad \Longleftrightarrow \quad j \ominus k = p.$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces las tres expresiones en (1) toman el valor 1, y en otro caso todas estas expresiones toman el valor 0. $\square$

Observación 4. Como la igualdad $j = k \oplus p$ es equivalente a la igualdad $j \ominus k = p$, la matriz $T_{n,p}$ se puede escribir de la siguiente manera equivalente:

$$T_{n,p} = [\delta_{j \ominus k, p}]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Proposición 5 (la matriz de traslación cíclica es una matriz circulante). Para cada p en G_n , la matriz $T_{n,p}$ es la matriz circulante asociada al vector e_p :

$$T_{n,p} = C(e_{n,p}).$$

Demostración. En efecto, por la definición de matrices circulantes,

$$(C(e_{n,p}))_{j,k} = (e_{n,p})_{j \ominus k} = \delta_{p, j \ominus k} = \delta_{j, k \oplus p} = (T_{n,p})_{j,k}.$$

$\square$

Proposición 6 (el producto de la matriz de traslación cíclica por un vector). *Para cada p en G_n , para cada x en $\mathbb{C}^n$ y para cada j en G_n ,*

$$(T_{n,p}x)_j = x_{j \ominus p}.$$

Demostración. Sean $p, j \in G_n$, $x \in \mathbb{C}^n$. Usando el Lema 3, calculemos la j -ésima componente del vector $(T_{n,p}x)_j$:

$$(T_{n,p}x)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{j, k \oplus p} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{j \ominus p, k} x_k = x_{j \ominus p}. \quad \square$$

Proposición 7 (el producto de la matriz de traslación cíclica por un vector, en términos de la convolución discreta cíclica). *Para cada p en G_n y cada x en $\mathbb{C}^n$,*

$$T_{n,p}x = e_{n,p} * x. \quad (2)$$

Más aún, para cada j en G_n ,

Demostración. Sean $p \in G_n$, $x \in \mathbb{C}^n$. Usando el Lema 3, calculemos la j -ésima componente del vector $e_p * x$:

$$(e_{n,p} * x)_j = \sum_{k=0}^{n-1} (e_{n,p})_{j \ominus k} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{p, j \ominus k} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{j \ominus p, k} x_k = x_{j \ominus p}.$$

Otra manera de demostrar la igualdad $T_{n,p}x = e_{n,p} * x$ es usar la conexión entre las matrices circulantes y la convolución.

$$T_{n,p}x = C(e_{n,p})x = e_{n,p} * x. \quad \square$$

Ejercicio 8 (el producto de dos matrices de traslación cíclica). Demuestre que para cada p, q en G_n ,

$$T_{n,p}T_{n,q} = T_{n,p \oplus q}.$$

Matrices de modulación

Definición 9. Para cada p en G_n , denotemos por $g_{n,p}$ al siguiente vector del espacio $\mathbb{C}^n$:

$$g_{n,p} := [\varepsilon_n^{-pk}]_{k=0}^{n-1}.$$

Salvo un coeficiente de normalización, el vector $g_{n,p}$ coincide con uno de los vectores de la base finita de Fourier del espacio $\mathbb{C}^n$.

Definición 10 (la matriz de modulación asociada a un número p en G_n). Para cada p en G_n , denotemos por $W_{n,p}$ la matriz diagonal asociada al vector $g_{n,p}$:

$$W_{n,p} := \text{diag}(g_{n,p}).$$

En otras palabras,

$$W_{n,p} = \text{diag}(\varepsilon_n^0, \varepsilon_n^{-p}, \varepsilon_n^{-2p}, \dots, \varepsilon_n^{-(n-1)p}).$$

Ejemplo 11. Para $n = 6$ y $p = 4$,

$$W_{6,4} = \begin{bmatrix} \varepsilon_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_6^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_6^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_6^{-12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_6^{-16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_6^{-20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_6^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_6^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_6^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_6^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_6^4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12 (el producto de dos matrices de modulación). Demuestre que para cada p, q en G_n ,

$$g_{n,p} \odot g_{n,q} = g_{n,p \oplus q}, \quad W_{n,p} W_{n,q} = W_{n,p \oplus q}.$$

Lema 13 (la transformada de Fourier del vector $e_{n,p}$). Para cada p en G_n ,

$$F_n e_{n,p} = w_{n,p}.$$

Demostración. Para cada j en G_n ,

$$(F_n e_{n,p})_j = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_n^{-jk} (e_{n,p})_k = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_n^{-jk} \delta_{p,k} = \varepsilon_n^{-jp} = (w_{n,p})_j. \quad \square$$

Teorema 14 (la matriz de Fourier entrelaza la matriz de traslación cíclica con la matriz de modulación). Para cada p en G_n ,

$$F_n T_{n,p} = W_{n,p} F_n \quad (3)$$

Demostración. Para cada x en $\mathbb{C}^n$, usamos la fórmula (2), el teorema de convolución y

$$\begin{aligned} (F_n T_{n,p})x &= F_n(T_{n,p}x) = F_n(e_{n,p} * x) = \\ &= (F_n e_{n,p}) \odot (F_n x) = g_{n,p} \odot (F_n x) = \text{diag}(g_{n,p})(F_n x) = (W_{n,p} F_n)x. \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple para cada vector x , se tiene la igualdad de matrices (3). $\square$

Corolario 15 (diagonalización de la matriz de traslación cíclica). Para cada p en G_n ,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n \right) T_{n,p} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n \right)^* = W_{n,p}. \quad (4)$$

Demostración. Multiplicando ambos lados de (3) por la matriz F_n^{-1} , obtenemos

$$\frac{1}{n} F_n T_{n,p} F_n^* = W_{n,p},$$

y de aquí se sigue (4).

Otra manera de obtener el mismo resultado es aplicar el teorema de diagonalización de matrices circulantes:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n \right) C(a) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} F_n \right)^* = \text{diag}(F_n a).$$

Usando esta fórmula con $a = e_{n,p}$ y el Lema 13, obtenemos (4). $\square$