Coeficientes de Fourier y transformadas simples de las función

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

11 de enero de 2021

Objetivo

Dada una función f de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, denotamos por $\widehat{f}_k$ sus coeficientes de Fourier:

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Consideramos algunas transformadas simples de f:

- desplazamientos, $g(x) := f(x - s)$,
- la reflexión, $g(x) := f(-x)$,
- la conjugación, $g(x) := \overline{f(x)}$,
- la modulación, $g(x) := \mathrm{e}^{p\,\mathrm{i}\,x} f(x)$,
- la derivada, $g(x) := f'(x)$.

Vamos a expresar $\widehat{g}_k$ en términos de $\widehat{f}_j$.

Prerrequisitos

- La clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
- Los coeficientes de Fourier para funciones de la clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
- Las integrales de una función de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ sobre un período.

Sobre las integrales de una función periódica (repaso)

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama 2π-periódica, si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Sobre las integrales de una función periódica (repaso)

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama 2π-periódica, si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ consiste de clases de equivalencia de funciones que satisfacen

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Sobre las integrales de una función periódica (repaso)

Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se llama 2π-periódica, si

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ consiste de clases de equivalencia de funciones que satisfacen

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Lema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Funciones básicas de Fourier

Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Estas funciones son 2π-periódicas.

Funciones básicas de Fourier

Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Estas funciones son 2π-periódicas.

La propiedad $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ implica que

$$\varphi_{j+k} = \varphi_j\,\varphi_k.$$

Funciones básicas de Fourier

Para cada k en $\mathbb{Z}$, denotamos por φ_k a la función

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

Estas funciones son 2π-periódicas.

La propiedad $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ implica que

$$\varphi_{j+k} = \varphi_j\,\varphi_k.$$

Además,

$$\overline{\varphi_k} = \varphi_{-k}.$$

$L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, multiplicación por φ_k, coeficientes de Fourier

En este tema suponemos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

En particular, los resultados se cumplen también para f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

$L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, multiplicación por φ_k, coeficientes de Fourier

En este tema suponemos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
En particular, los resultados se cumplen también para f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Dados f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $m \in \mathbb{Z}$, $\quad f\,\varphi_m \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

$L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, multiplicación por φ_k, coeficientes de Fourier

En este tema suponemos que $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
En particular, los resultados se cumplen también para f en $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Dados f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $m \in \mathbb{Z}$, $\quad f\,\varphi_m \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Dada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} f\,\overline{\varphi_k}\,\mathrm{d}\mu.$$

Los coeficientes de Fourier y los desplazamientos de la función

Proposición

Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := f(x - s).$$

Entonces $g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{g}_k = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-s)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - s)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x \qquad\qquad y = x - s$$

Demostración

$$\begin{aligned} \widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x & \qquad y = x - s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x \qquad y = x - s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y \qquad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x \qquad y = x - s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y \qquad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x & & y = x - s\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y & & \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y & & \text{propiedad homogénea la la integral}
\end{aligned}
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x && y = x - s\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y && \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y && \text{propiedad homogénea la la integral}\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x \qquad y = x - s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y \qquad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y \qquad \text{propiedad homogénea la la integral}$$

$$= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y \qquad \text{movemos al otro intervalo de longitud } 2\pi$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x && {\color{blue} y = x - s}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y && {\color{blue} \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y && {\color{blue} \text{propiedad homogénea la la integral}}\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y && {\color{blue} \text{movemos al otro intervalo de longitud } 2\pi}\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x && \color{blue}{y = x - s}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}(y+s)}\,\mathrm{d}y && \color{blue}{\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\mathrm{d}y && \color{blue}{\text{propiedad homogénea la la integral}}\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{2\pi-s} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y && \color{blue}{\text{movemos al otro intervalo de longitud } 2\pi}\\
&= \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{d}y && = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k.
\end{aligned}
$$

Los coeficientes de Fourier de la función reflejada

Proposición (los coeficientes de Fourier de la función reflejada)

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(x) \coloneqq f(-x).$$

Entonces $g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{-k}.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{0} f(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, ky}\, \mathrm{d}y.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Como la función debajo de la integral es 2π-periódica, podemos cambiar el intervalo de integración a $[0, 2\pi)$:

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Demostración

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Como la función debajo de la integral es 2π-periódica, podemos cambiar el intervalo de integración a $[0, 2\pi)$:

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky}\,\mathrm{d}y.$$

Finalmente, notamos que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ky} = \overline{\varphi_{-k}(y)}$,

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\overline{\varphi_{-k}(y)}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}_{-k}.$$

Los coeficientes de Fourier de una función par

Ejercicio. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Supongamos que f es par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x).$$

Demostrar que para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k.$$

Expresar $\widehat{f}_k$ en términos de

$$\int_0^\pi f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x.$$

Considerar por separado los casos $k = 0$ y $k \neq 0$.

Los coeficientes de Fourier de una función impar

Ejercicio. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Supongamos que f es impar:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = -f(x).$$

Demostrar que para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k.$$

En particular,

$$\widehat{f}_0 = 0.$$

Expresar $\widehat{f}_k$ en términos de

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x.$$

Considerar por separado los casos $k = 0$ y $k \neq 0$.

Los coeficientes de Fourier y la modulación

Proposición

Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{Z}$, $g := \varphi_p f$, esto es,

$$g(x) = \mathrm{e}^{p\,\mathrm{i}\,x} f(x).$$

Entonces $g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{k-p}.$$

Los coeficientes de Fourier y la modulación

Proposición

Sean $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{Z}$, $g := \varphi_p f$, esto es,

$$g(x) = \mathrm{e}^{p\,\mathrm{i}\,x} f(x).$$

Entonces $g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{g}_k = \widehat{f}_{k-p}.$$

Demostración.

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\varphi_k}\,\varphi_p f \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\varphi_{k-p}} f \,\mathrm{d}\mu = \widehat{f}_{k-p}.$$

Los coeficientes de Fourier y la “semimodulación”

Problema interesante.

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}}\, f(x) \qquad \text{para } x \in [0, 2\pi),$$

se continua de manera 2π-periódica a $\mathbb{R}$.

Expresar $\widehat{g}_k$ en términos de algunos de los coeficientes $\widehat{f}_j$.

Los coeficientes de Fourier de la función conjugada

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Pongamos $g := \overline{f}$, esto es,

$$g(x) = \overline{f(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces $g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{g}_k = \overline{\widehat{f}_{-k}}.$$

Los coeficientes de Fourier de la función conjugada

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Pongamos $g := \overline{f}$, esto es,

$$g(x) = \overline{f(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Entonces $g \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{g}_k = \overline{\widehat{f}_{-k}}.$$

Demostración.

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, \overline{\varphi_k(x)}\, \mathrm{d}x = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{\varphi_{-k}(x)}\, \mathrm{d}x} = \overline{\widehat{f}_{-k}}.$$

Criterio para que una función sea real, en términos de sus coeficientes de Fourier

Ejercicio. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Supongamos que

$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \mu\text{-c.t.p.}.$$

Mostrar que los coeficientes de Fourier de f satisfacen

$$\widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{f}_k}.$$

Luego, después de demostrar la propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier, podremos demostrar que esta condición es no solamente necesaria, sino también suficiente.

Los coeficientes de Fourier de la parte real y de la parte imaginaria de una función

Ejercicio.

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Pongamos $u := \operatorname{Re}(f)$, $v := \operatorname{Im}(f)$.

Justificar que $u, v \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{2}\bigl(\widehat{f}_k + \overline{\widehat{f}_{-k}}\bigr), \qquad \widehat{v}_k = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\bigl(\widehat{f}_k - \overline{\widehat{f}_{-k}}\bigr).$$

Sugerencia: expresar u y v en términos de f y $\overline{f}$.

Los coeficientes de Fourier de la derivada de una función

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que f es absolutamente continua en cada segmento finito de $\mathbb{R}$. Denotemos por g la derivada de f. Entonces

$$\widehat{g}_k = k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k.$$

Demostración

Aplicamos la integración por partes:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(2\pi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,2\pi} - f(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k0}}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x \\
&= k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k.
\end{aligned}$$

Demostración

Aplicamos la integración por partes:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f(2\pi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,2\pi} - f(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k0}}{2\pi} + k\,\mathrm{i}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x \\
&= k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k.
\end{aligned}$$

Ejercicio. Recordar las condiciones suficientes para la integración por partes (en el contexto de funciones absolutamente continuas y sus derivadas) y verificar que estas condiciones se cumplen en nuestro caso.

Los coeficientes de Fourier de la antiderivada de una función

Ejercicio.

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Demostrar que $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y expresar $\widehat{g}_k$ en términos de $\widehat{f}_k$.

Resumen: los coeficientes de Fourier de la función transformada

$g(x)$	$\widehat{g}_k$
$f(x-s)$	$\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,s}\,\widehat{f}_k$
$f(-x)$	$\widehat{f}_{-k}$
$\mathrm{e}^{p\,\mathrm{i}\,x}\,f(x)$	$\widehat{f}_{k-p}$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}_{-k}}$
$f'(x)$	$k\,\mathrm{i}\,\widehat{f}_k$

Resumen: algunas propiedades de f en términos de sus coeficientes de Fourier

f es par	$\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k$
f es impar	$\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k$
f es real	$\widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{f}_k}$

Resumen: algunas propiedades de f en términos de sus coeficientes de Fourier

f es par	$\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k$
f es impar	$\widehat{f}_{-k} = -\widehat{f}_k$
f es real	$\widehat{f}_{-k} = \overline{\widehat{f}_k}$

Luego veremos otras propiedades.

En particular, f es muy suave $\iff$ $\widehat{f}_k \to 0$ rápidamente cuando $|k| \to \infty$.