La base ortonormal de Fourier en un intervalo real

Hay varias maneras equivalentes de trabajar con series de Fourier:

- trabajar con funciones definidas en $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$;
- trabajar con funciones definidas en $\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$;
- trabajar con funciones definidas en $\mathbb{R}$, pero 2π-periódicas;
- trabajar con funciones definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$ de longitud 2π.

En este tema elegimos una de estas opciones: trabajamos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Usando desplazamientos y dilataciones, uno puede generalizar estas ideas a cualquier intervalo finito del eje real.

1 Definición (el espacio L^2 sobre $[0, 2\pi)$ con la medida de Lebesgue normalizada)**.** Dotamos $[0, 2\pi)$ de la medida normalizada $\frac{1}{2\pi}\mu_{\mathbb{R}}$, donde $\mu_{\mathbb{R}}$ es la medida de Lebesgue. Denotemos por H al espacio $L^2([0, 2\pi), \mu_{\mathbb{R}}/(2\pi))$. El producto interno en este espacio está dado mediante la fórmula

$$\langle f, g\rangle_H \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

2 Repaso (la función exponencial compleja)**.** La función exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede definir mediante la siguiente serie de potencias:

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{1}$$

También hay otras maneras equivalentes para definir exp. Usando alguna de las definiciones, se puede demostrar que

$$\exp' = \exp\,. \tag{2}$$

La función exponencial tiene la siguiente propiedad principal:

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w). \tag{3}$$

La función exponencial "conmuta" con la conjugación, porque los coeficientes de la serie (1) son reales:

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}). \tag{4}$$

Se puede demostrar que

$$\mathrm{e}^z = \exp(z). \tag{5}$$

Los números e y π están relacionados por la siguiente propiedad:

$$\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} = 1. \tag{6}$$

Más aún, 2π es el más pequeño entre los números estrictamente positivos x tales que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = 1$:

$$\forall x \in (0, 2\pi) \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \neq 1. \tag{7}$$

En otras palabras, 2π es el mínimo período positivo de la función $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$.

Las funciones básicas de Fourier y su propiedad ortonormal

Jean-Baptiste Joseph Fourier trabajaba con las funciones trigonométricas reales, cos y sen, pero en muchas situaciones es más cómodo usar las siguientes funciones complejas φ_m cuyas partes reales e imaginarias son $\cos(mx)$ y $\operatorname{sen}(mx)$.

3 Definición (las funciones básicas de Fourier)**.** Sea $m \in \mathbb{Z}$. Definimos $\varphi_m\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_m(x) \coloneqq \mathrm{e}^{m\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

4 Lema. *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\varphi_m' = m\,\mathrm{i}\;\varphi_m$.*

Demostración. Sale de la fórmula (2) usando la regla de la cadena. □

5 Lema. *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

$$\varphi_m(0) = 1, \qquad \lim_{x \to (2\pi)^-} \varphi_m(x) = 1.$$

6 Lema. *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} \varphi_m \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \delta_{m,0}.$$

Demostración. Si $m = 0$, entonces φ_m es la constante 1, y su integral es 2π.

Si $m \neq 0$, entonces la función $\frac{1}{m\,\mathrm{i}}\varphi_m$ es una antiderivada de φ_m, y esta función toma el mismo valor en los puntos 0 y 2π. □

7 Lema. *$\varphi_p \varphi_q = \varphi_{p+q}$, $\overline{\varphi_p} = \varphi_{-p}$.*

Demostración. Sale la propiedad principal de la función exponencial. □

8 Proposición. *La sucesión* $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal en* H.

Demostración. Sale de los lemas anteriores:

$$\langle \varphi_p, \varphi_q \rangle_H = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} \varphi_p \overline{\varphi_q} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} \varphi_{p-q} \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}} = \delta_{p-q,0} = \delta_{p,q}.$$ □

9 Definición (polinomios trigonométricos)**.** Los *polinomios trigonométricos* son combinaciones lineales de las funciones básicas de Fourier. Denotemos por $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los polinomios trigonométricos. En otras palabras, $\mathcal{T}$ es el subespacio vectorial de H generado por $\{\varphi_m \colon m \in \mathbb{Z}\}$.

10 Observación (el teorema de Stone–Weierstrass, repaso)**.** Sea K un compacto de Hausdorff y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(K)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene la constante 1 y separa los puntos. La última propiedad significa que

$$\forall x, y \in K \qquad \Big(x \neq y \qquad \Longrightarrow \qquad \exists f \in \mathcal{A} \quad f(x) \neq f(y) \Big).$$

Entonces, $\mathcal{A}$ es densa en $C(K)$.

Tenemos un obstáculo técnico: el conjunto $[0, 2\pi)$ no es compacto. Vamos a pasar de $[0, 2\pi)$ a $\mathbb{T}$.

11 Definición. Para cada $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ definimos $\widetilde{f}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$,

$$\widetilde{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}) := f(x) \qquad (x \in [0, 2\pi)).$$

Es fácil ver que esta definición es consistente.

12 Proposición. *Sea* $m \in \mathbb{Z}$. *Entonces, para cada* t *en* $\mathbb{T}$,

$$\widetilde{\varphi_m}(t) = t^m.$$

Demostración. Dado t en $\mathbb{T}$, encontramos x en $[0, 2\pi)$ tal que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = t$. Entonces

$$\widetilde{\varphi_m}(t) = \varphi_m(x) = \mathrm{e}^{m\,\mathrm{i}\,x} = t^m.$$ □

13 Proposición. $\widetilde{f} \in C(\mathbb{T})$ *para cada* f *en* $\mathcal{T}$*.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior. $\square$

14 Proposición. *El conjunto* $\widetilde{\mathcal{T}}$ *es denso en* $C(\mathbb{T})$*.*

Demostración. Es fácil ver que $\widetilde{\mathcal{T}}$ es una subálgebra de $C(\mathbb{T})$. La función constante 1 es $\widetilde{\varphi_0}$, por eso pertenece a $\widetilde{\mathcal{T}}$. Demostremos que $\widetilde{\mathcal{T}}$ separa los puntos de $\mathbb{T}$. En efecto, la función $\widetilde{\varphi_1}$ es la función identidad en $\mathbb{T}$:

$$\widetilde{\varphi_1(t)} = t \qquad (t \in \mathbb{T}),$$

y si $t \neq u$, entonces $\widetilde{\varphi_1}(t) \neq \widetilde{\varphi_1}(u)$. Hemos encontrado una función que pertenece a $\widetilde{\mathcal{T}}$ y toma valores diferentes en los puntos t, u. Por el teorema de Stone–Weierstrass, $\widetilde{\mathcal{T}}$ es un subconjunto denso de $C(\mathbb{T})$. $\square$

La Proposición 14 fue demostrada por Weierstrass usando otras ideas, luego fue demostrada por Fejér usando el núcleo de Fejér. Hay muchas otras demostraciones de esta proposición.

15 Observación. Se sabe que si X es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y μ_X es una medida de Radon en X, entonces el conjunto $C_c(X)$ es denso en $L^p(X, \mu_X)$ para cada p, $1 \leq p < +\infty$. Aquí $C_c(X)$ es el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto.

16 Proposición. *El conjunto* $\mathcal{T}$ *es denso en* H*.*

Idea de demostración. Sea $f \in H$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos una función $g \in C_0((0, 2\pi))$ tal que $\|g - f\|_H < \varepsilon/2$. Como g tiene soporte compacto, g se anula en una vecindad de 0 y en una vecindad de 2π. Extendemos g al dominio $[0, 2\pi)$ por continuidad, poniendo $g(0) = 0$. Entonces, es fácil de entender de manera intuitiva (y se puede demostrar de manera formal) que $\widetilde{g} \in C(\mathbb{T})$. Usando la densidad de $\widetilde{\mathcal{T}}$ en $C(\mathbb{T})$ encontramos h en $\mathcal{T}$ tal que $\|\widetilde{h} - \widetilde{g}\|_{\sup} < \varepsilon/2$. Entonces

$$\|h - g\|_H \leq \|h - g\|_{\sup} = \|\widetilde{h} - \widetilde{g}\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí sale que $\|h - f\|_H < \varepsilon$. $\square$

17 Proposición. $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal del espacio de Hilbert* H*.*

Demostración. Hemos probado que la sucesión $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal. Además, hemos demostrado que las combinaciones lineales de las funciones φ_m forman un subconjunto denso en H. Por el criterio de base ortonormal, esto implica que $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de H. □

18 Definición. Sea $f \in H$. Entonces los números

$$\widehat{f}_k := \langle f, \varphi_k \rangle_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, f(x)\, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x)$$

se llaman los *coeficientes de Fourier* de la función f.

19 Definición. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_k$$

se llama la *serie de Fourier* asociada a la sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

De acuerdo con las propiedades generales de bases ortonormales, obtenemos las siguientes propiedades de los coeficientes de Fourier y de las series de Fourier.

1. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_k$ converge en H, esto es, existe una única función g en H tal que

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=-m}^{n} \alpha_k \varphi_k - g \right\|_H = 0.$$

   Más aún, $\langle g, \varphi_k \rangle = \alpha_k$ para cada k en $\mathbb{Z}$ y

$$\|g\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2.$$

2. Sea $f \in H$. Entonces

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k \varphi_k,$$

   esto es,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}_k \varphi_k - f \right\|_H = 0.$$

   Más aún,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \|f\|_H^2.$$