La base ortonormal de Fourier en un intervalo real

Por simplicidad, trabajamos en el intervalo $[0, 2\pi)$. Dotamos este intervalo de la medida normalizada $\frac{1}{2\pi}\mu_{\mathbb{R}}$. Denotemos por H al espacio $L^2([0, 2\pi), \mu_{\mathbb{R}}/(2\pi))$. El producto interno en este espacio esta dado mediante la fórmula

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}.$$

Usando desplazamientos y dilataciones, se puede generalizar estas construcciones a cualquier intervalo finito del eje real.

1 Definición (funciones básicas de Fourier)**.** Para cada m en $\mathbb{Z}$, definimos $\varphi_m\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_m(x) \coloneqq \mathrm{e}^{m\,\mathrm{i}\,x}.$$

2 Lema. *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_m\,\mathrm{d}\mu = \delta_{m,0}.$$

Demostración. Si $m = 0$, entonces φ_m es la constante 1, y su integral es 2π.

Si $m \neq 0$, entonces la función $\frac{1}{m\,\mathrm{i}}\varphi_m$ es una antiderivada de φ_m, y esta función toma el mismo valor en los puntos 0 y 2π. □

3 Proposición. *La sucesión $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en H.*

Demostración. Sale del lema. □

4 Definición (polinomios trigonométricos)**.** Los *polinomios trigonométricos* son combinaciones lineales de las funciones básicas de Fourier. Denotemos por $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los polinomios trigonométricos. En otras palabras, $\mathcal{T}$ es el subespacio vectorial generado por $\{\varphi_m\colon m \in \mathbb{Z}\}$.

5 Lema. *El conjunto $\mathcal{T}$ es denso en H.*

Idea de demostración. Sea $f \in H$ y sea $\varepsilon > 0$. Se sabe que las funciones continuas forman un subconjunto denso en H. Elegimos $g \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tal que $\|g - f\|_H < \varepsilon/3$. Al modificar g en vecindades pequeñas de los puntos 0 y 2π, obtenemos una función h tal que $h \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$, $\|h - g\|_H < \varepsilon/3$. Se sabe que cada función continua en $[0, 2\pi]$, que toma el mismo valor en 0 y 2π, se aproxima uniformemente por polinomios trigonométricos (este teorema fue demostrado por Weierstrass y de otra manera por Fejér). Encontramos t en $\mathcal{T}$ tal que $\|t - h\|_\infty < \varepsilon/3$. Luego $\|t - h\|_H < \varepsilon/3$ y $\|t - f\|_H < \varepsilon$. $\square$

6 Proposición. *$(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert H.*

7 Definición. Sea $f \in H$. Entonces los números

$$\widehat{f}_k \coloneqq \langle f, \varphi_k\rangle_H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

se llaman los *coeficientes de Fourier* de la función f.

8 Definición. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_k$$

se llama la *serie de Fourier* asociada a la sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

De acuerdo con las propiedades generales de bases ortonormales, obtenemos las siguientes propiedades de los coeficientes de Fourier y de las series de Fourier.

1. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\varphi_k$ converge en H, esto es, existe una única función g en H tal que

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=-m}^{n} \alpha_k\varphi_k - g \right\|_H = 0.$$

   Más aún, $\langle g, \varphi_k\rangle = \alpha_k$ para cada k en $\mathbb{Z}$ y

$$\|g\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2.$$

2. Sea $f \in H$. Entonces

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k \varphi_k,$$

   esto es,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}_k\varphi_k - f \right\|_H = 0.$$

   Más aún,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2 = \|f\|_H^2.$$