Lema de Fatou
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

12 de junio de 2024

Plan

En esta presentación seguimos el camino de Bartle y Rudin.

Objetivo: demostrar el lema de Fatou usando el teorema de la convergencia monótona.

En esta presentación seguimos el camino de Bartle y Rudin.

Objetivo: demostrar el lema de Fatou usando el teorema de la convergencia monótona.

Lema de Fatou

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida
y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de clase $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Entonces

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Completez del espacio L^p

Teorema de la convergencia dominada

Lema de Fatou

Teorema de la convergencia monótona

Propiedad σ-subaditiva de medida

La medida de la unión de una suc. crec.

Propiedad σ-aditiva de medida

Prerrequisitos:

- el concepto del límite inferior de una sucesión;
- el teorema de la convergencia monótona;
- la propiedad monótona de la integral respecto a la función.

El límite inferior de una sucesión

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

El límite inferior de una sucesión

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

Denotamos por b_k el ínfimo de la k-ésima cola:

$$b_k := \inf_{n\geq k} a_n.$$

El límite inferior de una sucesión

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

Denotamos por b_k el ínfimo de la k-ésima cola:

$$b_k := \inf_{n\geq k} a_n.$$

La sucesión $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es

El límite inferior de una sucesión

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

Denotamos por b_k el ínfimo de la k-ésima cola:

$$b_k := \inf_{n\geq k} a_n.$$

La sucesión $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente, y

El límite inferior de una sucesión

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

Denotamos por b_k el ínfimo de la k-ésima cola:

$$b_k := \inf_{n\geq k} a_n.$$

La sucesión $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente, y

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} b_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida

y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Denotemos por $g\colon X \to [0, +\infty]$ la función límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Entonces, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Monotonía de la integral de Lebesgue respecto a la función

Proposición

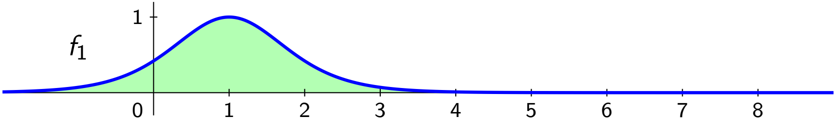
Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

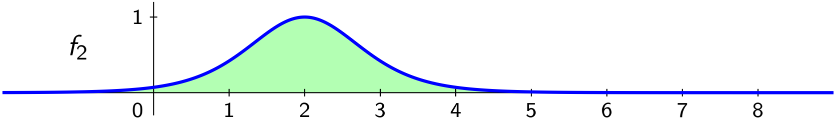
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

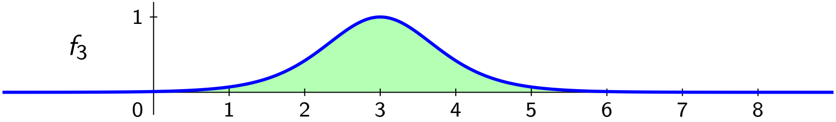
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

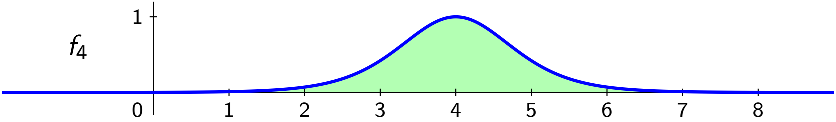
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

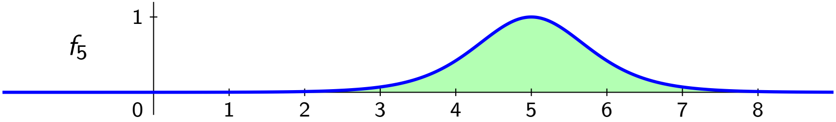
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

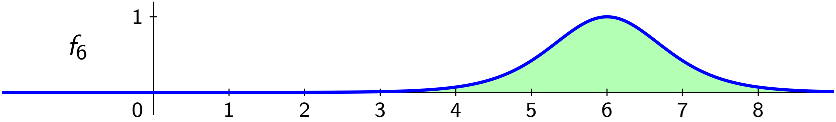
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

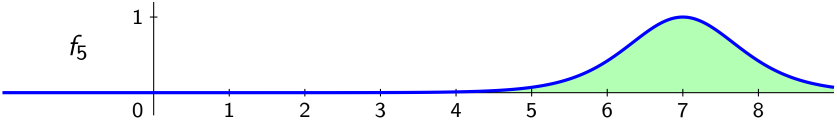
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

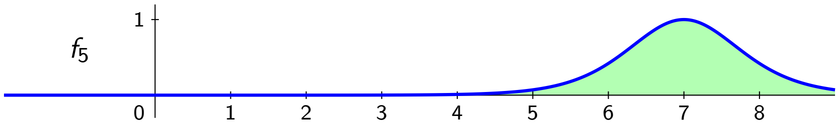
$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



La convergencia puntual no garantiza la convergencia de las integrales

Ejemplo. Consideramos el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ.

$$f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$



Entonces se tiene la convergencia puntual $f_n \to g$, pero

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\mu = 2, \qquad \int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Lema de Fatou

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])^{\mathbb{N}}$.

Entonces,

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Inicio de la demostración: conocemos a los personajes del cuento

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x), \qquad h(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Inicio de la demostración: conocemos a los personajes del cuento

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x), \qquad h(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Para cada x en X, la sucesión $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es

Inicio de la demostración: conocemos a los personajes del cuento

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x), \qquad h(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Para cada x en X, la sucesión $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente.

Inicio de la demostración: conocemos a los personajes del cuento

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x), \qquad h(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Para cada x en X, la sucesión $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente.

$$h(x) =$$

Inicio de la demostración: conocemos a los personajes del cuento

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x), \qquad h(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Para cada x en X, la sucesión $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente.

$$h(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x).$$

Inicio de la demostración: conocemos a los personajes del cuento

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x), \qquad h(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Para cada x en X, la sucesión $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente.

$$h(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x).$$

Las funciones g_k y h son $\mathcal{F}$-medibles.

Demostración

$$\boxed{g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x)}$$

Demostración

$$\forall n \geq k \quad f_n \geq g_k \longleftarrow g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x)$$

Demostración

$$\forall n \geq k \quad f_n \geq g_k$$

$$g_k(x) := \inf_{n\geq k} f_n(x)$$

$$\forall n \geq k$$

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración

$$g_k(x) := \inf_{n\geq k} f_n(x)$$

$$\forall n \geq k \quad f_n \geq g_k$$

$$\forall n \geq k$$
$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

$$\inf_{n\geq k} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración

$$\forall n \geq k \quad f_n \geq g_k$$

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x)$$

$$\forall n \geq k$$

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

$$\inf_{n \geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right) \geq \lim_{k \to \infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración

$$\forall n \geq k \quad f_n \geq g_k$$

$$g_k(x) := \inf_{n \geq k} f_n(x)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g_k \leq g_{k+1}$$

$$\forall n \geq k$$
$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

$$\inf_{n \geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right) \geq \lim_{k \to \infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración

$$\forall n \geq k \quad f_n \geq g_k$$

$$g_k(x) := \inf_{n\geq k} f_n(x)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g_k \leq g_{k+1}$$

$$\forall n \geq k$$
$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

TCM

$$\inf_{n\geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\inf_{n\geq k} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right) \geq \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k \, \mathrm{d}\mu$$

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h.

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h.

En este caso, $\liminf_{n\to\infty} f_n$

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h.

En este caso, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ coincide con h,

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h.

En este caso, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ coincide con h, y el lema de Fatou afirma que

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h. En este caso, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ coincide con h, y el lema de Fatou afirma que

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h. En este caso, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ coincide con h, y el lema de Fatou afirma que

$$\int_X h\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Aún en este caso, la desigualdad puede ser estricta.

El caso particular cuando existe el límite puntual

En muchas aplicaciones, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función h.

En este caso, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ coincide con h, y el lema de Fatou afirma que

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Aún en este caso, la desigualdad puede ser estricta.

Revisar el mismo ejemplo:

$$X = \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x-n)^2}, \qquad g(x) = 0.$$

Otros ejemplos con desigualdad estricta

Ejemplo. $X = \mathbb{N}$, con la medida de conteo, $f_n = \mathbb{1}_{\{n\}}$. En otras palabras,

$$f_n(m) = \delta_{m,n}.$$

En los siguientes ejemplos, consideramos $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1)}$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $f_n = n\,\mathbb{1}_{(0,1/n)}$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{[n,2n)}$.

Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{(x-n)^2 + 1}$.