Teorema de Cantor, Schröder y Bernstein

Los siguientes razonamientos están basados en ideas de König.

1 Lema (teorema de Cantor, Schröder y Bernstein para el caso de un subconjunto)**.** *Sean A y C conjuntos, $C \subseteq A$, $\varphi\colon A \to C$ una función inyectiva. Entonces existe una función biyectiva $\psi\colon A \to C$.*

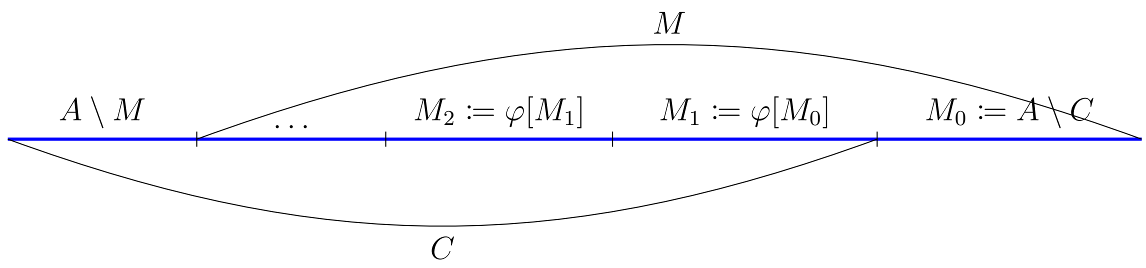
Demostración. Definimos una sucesión de conjuntos $(M_k)_{k=0}^{\infty}$ de la siguiente manera, con una condición inicial y una regla recursiva:

$$M_0 \coloneqq A \setminus C, \qquad M_{k+1} \coloneqq \varphi[M_k].$$

Pongamos

$$M \coloneqq \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} M_k = (A \setminus C) \cup \varphi[A \setminus C] \cup \varphi[\varphi[A \setminus C]] \cup \ldots .$$

Notemos que $A \setminus C \subseteq M$. Usando una regla lógica apropiada (que $p \to q$ es equivalente a $\overline{q} \to \overline{p}$) concluimos que $A \setminus M \subseteq C$. Mostremos la situación con un esquema.



Por la definición de M, si $x \in M$, entonces $\varphi(x) \in M \cap C$. Denotemos por η a la compresión de la función φ, con el dominio restringido a M y el codominio restringido a $M \cap C$:

$$\eta\colon M \to M \cap C, \qquad \eta(x) \coloneqq \varphi(x).$$

Como φ es inyectiva, η es inyectiva. Mostremos que η es suprayectiva. Sea $y \in M \cap C$. Entonces, por la definición de M, existe un k en $\mathbb{N}_0$ tal que $y \in M_k$. Si $k = 0$, entonces $y \in A \setminus C$, lo que contradice a la suposición que $y \in C$. Luego $k \geq 1$ y $y \in M_k = \varphi[M_{k-1}]$. Elegimos x en M_{k-1} tal que $y = \varphi(x)$. Como $x \in M$, obtenemos $y = \varphi(x) = \eta(x)$. Hemos mostrado que η es biyectiva. Definimos $\psi\colon A \to C$ mediante la regla

$$\psi(x) \coloneqq \begin{cases} \eta(x), & x \in M; \\ \mathrm{id}_{A\setminus M}(x), & x \in A \setminus M; \end{cases} \qquad \text{esto es,} \qquad \psi(x) \coloneqq \begin{cases} \varphi(x), & x \in M; \\ x, & x \in A \setminus M. \end{cases}$$

Siendo la unión disjunta de dos biyecciones, la función ψ es una biyección $A \to C$. □

2 Observación. En la demostración del Lema 1, los conjuntos M_k se pueden definir como $M_k = \varphi^{[k]}[A \setminus C]$, donde $\varphi^{[k]}$ es la k-ésima iteración de φ.

3 Observación. Expliquemos por qué ψ está construida de esta manera. La función ψ debe enviar A en C. En particular, los elementos del conjunto $M_0 \coloneqq A \setminus C$ se deben mover al conjunto C. La función φ es la herramienta más simple que puede hacerlo. Por lo tanto, para cada x en M_0 pongamos $\psi(x) \coloneqq \varphi(x)$.

Notemos que los elementos de M_1 son imágenes de los elementos de M_0 bajo la función ψ. Queremos que ψ sea inyectiva, por eso ψ debe mover los elementos de M_1 a otros lugares. La función φ es la herramineta más simple que puede hacerlo. Por lo tanto, para cada x en M_1 pongamos $\psi(x) \coloneqq \varphi(x)$.

Así vemos que todos los elementos de M deben moverse, y los movemos aplicando la función φ. Los elementos de $A \setminus M$ pueden quedarse inmovibles.

4 Ejercicio. En la notación de la demostración del Lema 1, mostrar que los conjuntos M_k, correspondientes a diferentes valores de k, son disjuntos a pares.

5 Teorema (Cantor, Schröder y Bernstein)**.** *Sean A y B conjuntos, $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ funciones inyectivas. Entonces $A \sim B$.*

Demostración. Pongamos $C \coloneqq g[B]$. Definimos $\varphi\colon A \to C$ mediante la regla $\varphi(a) \coloneqq g(f(a))$. Entonces $C \subseteq A$ y φ es inyectiva. Por el Lema 1, $A \sim C$. Pero $C = g[B] \sim B$. Concluimos que $A \sim B$. $\square$

6 Ejemplo. Consideramos el conjunto $A = [0, +\infty)$ y su subconjunto $C = (0, +\infty)$. Definimos $\varphi\colon A \to C$ mediante la regla $\varphi(x) \coloneqq x + 1$. Para este ejemplo, encuentre los conjuntos M_k y la función ψ de la demostración del Lema 1.

7 Ejemplo. Consideramos el conjunto $A = [0, 1]$ y su subconjunto $C = [0, 1)$. Definimos $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1)$ mediante la regla $\varphi(x) = x/2$. Entonces φ es una inyección. Para este ejemplo, encuentre los conjuntos M_k y la función ψ de la demostración del Lema 1.

8 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Usando el teorema de Cantor, Schröder y Bernstein, demuestre que $[a, b] \sim [a, b)$.

9 Ejercicio. Usando el teorema de Cantor, Schröder y Bernstein, demuestre que $\mathbb{R} \sim [0, +\infty)$.