Álgebras C*: definición y ejemplos

1 Definición (involución de un álgebra compleja)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja. Una función $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se llama *involución* de $\mathcal{A}$ si cumple con las siguientes propiedades.

1. $f(f(a)) = a$ para cada a en $\mathcal{A}$.

2. f es lineal conjugada.

3. $f(ab) = f(b)f(a)$ para cualesquiera a, b en $\mathcal{A}$.

Por lo común, la involución se denota por $*$, es decir, en vez de $f(a)$ se escribe a^*. El elemento a^* se llama el *adjunto* de a.

2 Definición. Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con involución se llama *álgebra C** si la norma y la involución satisfacen la siguiente propiedad:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \qquad (a \in \mathcal{A}). \tag{1}$$

Ejemplos de álgebras C*

3 Ejemplo. $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert.

4 Ejemplo. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5 Ejemplo. $\mathcal{A} = C(K)$, donde K es un compacto de Hausdorff.

6 Ejemplo. $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$.

7 Ejemplo. $\mathcal{A} = L^\infty(X, \mu)$, donde (X, μ) es un espacio de medida.

8 Ejemplo (C*-subálgebra de un C*-álgebra)**.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* y sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$ cerrada bajo las operaciones algebraicas, cerrada bajo la involución y cerrada en la topología de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B}$, considerada con las operaciones restringidas y con la norma restringida, es un álgebra C*. En esta situación se dice que $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$.

Propiedades elementales de involuciones

9 Proposición (involución y la identidad)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con involución y con identidad e. Entonces $e^* = e$.*

Demostración. $e^* = ee^* = (e^*)^* e^* = (ee^*)^* = (e^*)^* = e$. $\square$

10 Proposición (involución y elementos invertibles)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con identidad y con involución, y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces a es invertible si, y solo si, a^* es invertible. Si a es invertible, entonces*

$$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*.$$

Demostración. Sea a invertible. Pongamos $b \coloneqq a^{-1}$. Entonces

$$(a^* b^*) = (ba)^* = e^* = e, \qquad (b^* a^*) = (ab)^* = e^* = e.$$

Por eso a^* es invertible y $(a^*)^{-1} = b^*$. $\square$

11 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con identidad y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathrm{Sp}(a^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon\ \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}(a)\}.$$

12 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Entonces la involución de $\mathcal{A}$ es isométrica.*

Demostración. Es suficiente suponer que $\|a\|^2 \le \|a^* a\|$ para cada a en $\mathcal{A}$. Usando la propiedad submultiplicativa obtenemos

$$\|a\|^2 \le \|a^*\|\,\|a\|.$$

Si $a \neq 0$, entonces $\|a\| \le \|a^*\|$. Usando la propiedad idempotente obtenemos la desigualdad inversa:

$$\|a^*\| \le \|(a^*)^*\| \le \|a\|,$$

de donde concluimos que $\|a^*\| = \|a\|$. $\square$