Álgebras de Banach: definición y ejemplos

Definición (álgebra compleja asociativa). Se dice que $(\mathcal{A}, \cdot)$ es una *álgebra compleja* si $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial complejo, $\cdot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una operación binaria bilineal (distributiva y homogénea) con respecto a las operaciones lineales en $\mathcal{A}$. Se dice que $(\mathcal{A}, \cdot)$ es *asociativa* si la operación $\cdot$ es asociativa. Se dice que $(\mathcal{A}, \cdot)$ es *conmutativa* si $\cdot$ es conmutativa.

Definición (álgebra con unidad). Sean $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa y $e \in \mathcal{A}$. Se dice que e es *unidad* de $\mathcal{A}$ si $ae = ea = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Si existe una unidad en $\mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ es una *álgebra con unidad*. Es fácil ver que si existe una unidad en $\mathcal{A}$, entonces la unidad es única.

Definición (álgebra de Banach). Se dice que $(\mathcal{A}, \cdot, \|\cdot\|)$ es una *álgebra de Banach* si:

i) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach complejo,

i) $(\mathcal{A}, \cdot)$ es una álgebra compleja asociativa;

ii) $\|a \cdot b\| \le \|a\| \cdot \|b\|$ para todos $a, b \in \mathcal{A}$.

Habitualmente, cuando está claro de cual multiplicación y de cual norma se trata, se escribe $\mathcal{A}$ en lugar de $(\mathcal{A}, \cdot, \|\cdot\|)$

1. Ejemplo: el campo de números complejos. $\mathbb{C}$ es el ejemplo más simple de álgebra de Banach. Tiene unidad 1.

2. Ejemplo: tuplas de números complejos. $\mathbb{C}^n$ con las operaciones entrada por entrada y con la norma-supremo.

3. Ejemplo: álgebra de convolución sobre el grupo $\mathbb{Z}_2$. $\mathbb{C}^2$ con la siguiente operación de multiplicación y con la L^1-norma:

$$(a, b)(c, d) = (ab + cd, ad + bc), \qquad |(a, b)| = |a| + |b|.$$

Demostrar que es una álgebra de Banach conmutativa con unidad.

4. Ejemplo: sucesiones que tienen un límite. c, el álgebra de todas las sucesiones convergentes, con las operaciones entrada por entrada y con la norma-supremo. Es una álgebra conmutativa con unidad.

5. Ejemplo: sucesiones que tienen límite cero. c_0, el álgebra de todas las sucesiones que tienen límite cero, con las operaciones entrada por entrada y con la norma-supremo. Es una álgebra conmutativa sin unidad.

6. Ejemplo: funciones continuas en un espacio compacto. $C(K)$, donde K es un espacio topológico compacto. Se considera con las operaciones punto a punto y con la norma-supremo (norma uniforme). Es una álgebra conmutativa con unidad.

7. Ejemplo: funciones continuas en un espacio localmente compacto que tienen límite cero en infinito. $C_0(K)$, donde K es un espacio topológico localmente compacto. Se considere con las operaciones punto a punto y con la norma-supremo (norma uniforme). Es una álgebra conmutativa sin unidad.

8. Ejemplo: matrices cuadradas. Matrices $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ con las operaciones comunes de matrices y con la norma de operadores en $\ell^2(\{1,\ldots,n\},\mathbb{C})$:

$$\|A\| := \max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\\ \|x\|_2\le 1}} \|Ax\|_2.$$

Es una álgebra no conmutativa con unidad.

9. Ejemplo: operadores lineales acotados en un espacio de Banach. $\mathrm{End}(X)$ o $\mathcal{B}(X)$, donde X es un espacio de Banach complejo, con las operaciones de operadores y con la norma de operadores:

$$\|A\| := \max_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} \|Ax\|.$$

Es una álgebra no conmutativa con unidad.

10. Ejemplo: operadores compactos en un espacio de Banach. Operadores compactos en un espacio de Banach. Es una álgebra no conmutativa sin unidad.

11. Ejemplo: álgebra de convolución. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ con la operación de convolución. Es una álgebra de Banach conmutativa. Después vamos a probar que esta álgebra no tiene unidad.