Teorema de Baire para los espacios métricos completos (un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

2 de septiembre de 2022

Objetivo

- Demostrar el teorema para los espacios métricos completos.

Prerrequisitos

- Espacios de Baire.
- Caracterización de espacios métricos completos en términos de sucesiones de conjuntos encajados.

Repaso: conjuntos densos

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama denso, si $\operatorname{clos}(Y) = X$.

Repaso: conjuntos densos

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama denso, si $\operatorname{clos}(Y) = X$.

Proposición (criterio de conjunto denso)

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Entonces

$$\operatorname{clos}(Y) = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall A \in \tau \setminus \{\emptyset\} \qquad A \cap Y \neq \emptyset.$$

Conjuntos magros

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es magro, si

$$\exists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^X)^{\mathbb{N}} \qquad \left(\left(\forall k \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = \emptyset \right) \qquad \wedge \qquad Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right).$$

Espacios de Baire

Proposición

Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es de Baire, esto es, para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa;

(b) cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío,
esto es, para cualquier sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte, el interior de su unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es vacía.

Bolas abiertas y cerradas en espacios métricos

Si (X, d) es un espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$, entonces ponemos

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon \ d(x, a) < r\}, \qquad C(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon \ d(x, a) \leq r\}.$$

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$.

Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$.

Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Demostración.

Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$.

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$.

Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Demostración.

Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Pongamos

$$r := \min \{R, \delta/2\}.$$

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$.
Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Demostración.

Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Pongamos

$$r := \min \{R, \delta/2\}.$$

Entonces $0 < r \leq R$ y $r < \delta$.

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$.

Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Demostración.

Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Pongamos

$$r := \min\{R, \delta/2\}.$$

Entonces $0 < r \leq R$ y $r < \delta$. Mostremos que $C(a, r) \subseteq A$.

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$. Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Demostración.

Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Pongamos

$$r := \min \{R, \delta/2\} .$$

Entonces $0 < r \leq R$ y $r < \delta$. Mostremos que $C(a, r) \subseteq A$.

Si $x \in C(a, r)$, entonces $d(x, a) \leq r < \delta$,

Conjuntos abiertos y bolas cerradas

Lema

Sean X un espacio métrico, A un subconjunto abierto de X, $a \in A$ y $R > 0$.
Entonces existe r tal que $0 < r \leq R$ y $C(a, r) \subseteq A$.

Demostración.

Como A es abierto y $a \in A$, elegimos $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subseteq A$. Pongamos

$$r := \min \{R, \delta/2\} .$$

Entonces $0 < r \leq R$ y $r < \delta$. Mostremos que $C(a, r) \subseteq A$.

Si $x \in C(a, r)$, entonces $d(x, a) \leq r < \delta$, así que $x \in B(a, R)$ y $x \in A$.

Repaso: sucesiones anidadas de conjuntos en espacios métricos completos

Proposición

Sea X un espacio métrico completo y sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X tal que:

- G_n es cerrado y no vacío para cada n en $\mathbb{N}$,
- $G_{n+1} \subseteq G_n$ para cada n en $\mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$.

Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$.

Teorema

Cada espacio métrico completo es un espacio de Baire.

Demostración, inicio

Sean (X,d) un espacio métrico completo, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos,

$$V = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Sea $A \in \tau_X$, $A \neq \emptyset$.

Vamos a demostrar que $A \cap V \neq \emptyset$.

Demostración, construcción de x_1 y r_1

Vamos a construir una sucesión de puntos y una sucesión de radios:

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \qquad (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (0,+\infty)^{\mathbb{N}}.$$

Demostración, construcción de x_1 y r_1

Vamos a construir una sucesión de puntos y una sucesión de radios:

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \qquad (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (0,+\infty)^{\mathbb{N}}.$$

Como A es abierto y U_1 es denso, $A \cap U_1 \neq \emptyset$.

Demostración, construcción de x_1 y r_1

Vamos a construir una sucesión de puntos y una sucesión de radios:

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \qquad (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (0,+\infty)^{\mathbb{N}}.$$

Como A es abierto y U_1 es denso, $A \cap U_1 \neq \emptyset$.

Elegimos $x_1 \in A \cap U_1$. Como $A \cap U_1$ es abierto, encontramos r_1 en $(0,1]$ tal que

$$C(x_1, r_1) \subseteq A \cap U_1.$$

Demostración, construcción de x_k y r_k

Sea k en $\mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Demostración, construcción de x_k y r_k

Sea k en $\mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Suponemos que x_{k-1} y r_{k-1} ya están elegidos.

Demostración, construcción de x_k y r_k

Sea k en $\mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Suponemos que x_{k-1} y r_{k-1} ya están elegidos.

Como U_k es denso y $B(x_{k-1}, r_{k-1})$ es abierto,

$$U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \neq \emptyset.$$

Demostración, construcción de x_k y r_k

Sea k en $\mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Suponemos que x_{k-1} y r_{k-1} ya están elegidos.

Como U_k es denso y $B(x_{k-1}, r_{k-1})$ es abierto,

$$U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \neq \emptyset.$$

Elegimos $x_k \in U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$.

Demostración, construcción de x_k y r_k

Sea k en $\mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Suponemos que x_{k-1} y r_{k-1} ya están elegidos.

Como U_k es denso y $B(x_{k-1}, r_{k-1})$ es abierto,

$$U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \neq \emptyset.$$

Elegimos $x_k \in U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$.

Como $U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1})$ es abierto, encontramos r_k tal que $0 < r_k \leq 1/k$ y

$$C(x_k, r_k) \subseteq U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}).$$

Demostración, propiedades de $C(x_k, r_k)$

$(C(x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos.

Demostración, propiedades de $C(x_k, r_k)$

$(C(x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos.

Además, para cada k,

$$C(x_k, r_k) \subseteq U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \subseteq C(x_{k-1}, r_{k-1}).$$

Demostración, propiedades de $C(x_k, r_k)$

$(C(x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos.

Además, para cada k,

$$C(x_k, r_k) \subseteq U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \subseteq C(x_{k-1}, r_{k-1}).$$

Para cada k, $\operatorname{diam}(C(x_k, r_k)) \leq 2r_k < \frac{2}{k}$, así que

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(C(x_k, r_k)) = 0.$$

Demostración, propiedades de $C(x_k, r_k)$

$(C(x_k, r_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y no vacíos.

Además, para cada k,

$$C(x_k, r_k) \subseteq U_k \cap B(x_{k-1}, r_{k-1}) \subseteq C(x_{k-1}, r_{k-1}).$$

Para cada k, $\operatorname{diam}(C(x_k, r_k)) \leq 2r_k < \frac{2}{k}$, así que

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(C(x_k, r_k)) = 0.$$

Como X es completo, encontramos

$$y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C(x_k, r_k).$$