Espacios de Baire

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

31 de agosto de 2022

Objetivos

- Definir el concepto de espacios de Baire
  (en términos de intersecciones numerables de subconjuntos abiertos y densos).
- Caracterizar los espacios de Baire en términos de interiores de subconjuntos magros.
- Prepararnos al tema futuro:
  el teorema de Baire para los espacios métricos completos.

Prerrequisitos

- Conjuntos densos en espacios topológicos.
- Conjuntos densos en ninguna parte.
- Las leyes de De Morgan.

Conjuntos densos

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama denso, si $\mathrm{clos}(Y) = X$.

Conjuntos densos

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama denso, si $\operatorname{clos}(Y) = X$.

En el contexto de la definición, también se dice que Y es denso en X.

Conjuntos densos

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama denso, si $\operatorname{clos}(Y) = X$.

En el contexto de la definición, también se dice que Y es denso en X.

Proposición (criterio de conjunto denso)

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Entonces

$$\operatorname{clos}(Y) = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall A \in \tau \setminus \{\emptyset\} \qquad A \cap Y \neq \emptyset.$$

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$.

Como $\operatorname{clos}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \emptyset$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$.

Como $\operatorname{clos}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $A \cap Y \neq \emptyset$ para cada A en $\tau \setminus \{\emptyset\}$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$.

Como $\operatorname{clos}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $A \cap Y \neq \emptyset$ para cada A en $\tau \setminus \{\emptyset\}$.

Queremos demostrar que $\operatorname{clos}(Y) = X$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$.

Como $\text{clos}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $A \cap Y \neq \emptyset$ para cada A en $\tau \setminus \{\emptyset\}$.

Queremos demostrar que $\text{clos}(Y) = X$.

Sea $x \in X$ y sea $A \in \tau_x$.

Demostración

$\Longrightarrow$. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A \in \tau_a$.

Como $\operatorname{clos}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$. Supongamos que $A \cap Y \neq \emptyset$ para cada A en $\tau \setminus \{\emptyset\}$.

Queremos demostrar que $\operatorname{clos}(Y) = X$.

Sea $x \in X$ y sea $A \in \tau_x$.

Por la suposición, $A \cap Y \neq \emptyset$. Esto significa que $x \in \operatorname{clos}(Y)$.

Conjunto denso en ninguna parte

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es denso en ninguna parte, si

$$\operatorname{int}(\operatorname{clos}(Y)) = \emptyset.$$

Conjunto denso en ninguna parte

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es denso en ninguna parte, si

$$\operatorname{int}(\operatorname{clos}(Y)) = \emptyset.$$

Ejemplo: $\mathbb{Z}$, como subconjunto del espacio topológico $\mathbb{R}$.

Conjunto magro

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es magro,
si existe una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Conjunto magro

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es magro,
si existe una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

En otras palabras, Y es magro, si

$$\exists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^X)^{\mathbb{N}} \qquad \left(\left(\forall k \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = \emptyset \right) \qquad \wedge \qquad Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right).$$

Conjunto magro

Definición

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es magro,
si existe una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

En otras palabras, Y es magro, si

$$\exists (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (2^X)^{\mathbb{N}} \qquad \left(\left(\forall k \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = \emptyset \right) \qquad \wedge \qquad Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \right).$$

Terminología clásica de Baire:

"conjunto de la primera categoría" = conjunto magro;

"conjunto de la segunda categoría" = conjunto no magro.

Espacio de Baire

Definición

Un espacio topológico X se llama espacio de Baire
si para cualquier sucesión $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos,
su intersección $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ también es densa.

Espacio de Baire

Definición

Un espacio topológico X se llama espacio de Baire si para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa.

Formalmente, X es de Baire, si y sólo si,

$$\forall (U_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}} \qquad \left(\left(\forall k \in \mathbb{N} \quad \operatorname{clos}(U_k) = X \right) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k \right) = X \right).$$

Criterio de espacio de Baire

Proposición

Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es de Baire, esto es, para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa;

(b) cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío,
esto es, para cualquier sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte,
el interior de su unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es vacía.

Criterio de espacio de Baire

Proposición

Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es de Baire, esto es, para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa;

(b) cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío, esto es, para cualquier sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte, el interior de su unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es vacía.

Idea de demostración: aplicar las fórmulas de De Morgan y la fórmula

$$X \setminus \operatorname{clos}(Y) = \operatorname{int}(X \setminus Y).$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire,

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D) =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \subseteq$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus U_k)\right)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus U_k)\right) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que X es de Baire.

Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k := X \setminus \operatorname{clos}(E_k)$.

Entonces $U_k \in \tau$ y $\operatorname{clos}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X$,
así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos.

Como X es de Baire, $\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X$. Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus U_k)\right) = \emptyset.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset,$
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right)$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset,$
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right)$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) = \operatorname{clos}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right)$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) = \operatorname{clos}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right) =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset,$
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) = \operatorname{clos}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right) = X \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset$,
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) = \operatorname{clos}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right) = X \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío.

Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos.

Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k := X \setminus U_k$.

Entonces $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(E_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(\operatorname{int}(U_k)) = X \setminus \operatorname{clos}(U_k) = \emptyset,$
así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte.

Por lo tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es magro. Por la suposición, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \emptyset$. Luego

$$\operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{clos}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) = \operatorname{clos}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right) = X \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = X.$$