Espacios de Baire

Agradezco a Carlos Fernando Bermúdez Torres por corregir un error en estos apuntes.

Objetivos. Introducir el concepto de espacios de Baire, demostrar la equivalencia de dos descripciones.

Prerrequisitos. Conjuntos densos en espacios topológicos, conjuntos densos en ninguna parte, las leyes de De Morgan.

Aplicaciones. El teorema de Baire para los espacios métricos completos.

1 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto Y de X se llama *denso* (en X), si $\operatorname{cl}(Y) = X$.

2 Proposición. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es denso si, y sólo si, para cualquier A en $\tau \setminus \{\varnothing\}$, la intersección $A \cap Y$ es no vacía.*

Demostración. 1. Supongamos que Y es denso. Sea $A \in \tau \setminus \{\varnothing\}$. Elegimos a en A. Entonces $A \in \tau_a$. Como $\operatorname{cl}(Y) = X$ y $a \in X$, $A \cap Y \neq \varnothing$.

2. Supongamos que $A \cap Y \neq \varnothing$ para cualquier A en $\tau \setminus \{\varnothing\}$. Vamos a demostrar que Y es denso. Sea $x \in X$ y sea $A \in \tau_x$. Entonces, por la suposición, $A \cap Y \neq \varnothing$. Esto significa que $x \in \operatorname{cl}(Y)$. $\square$

3 Definición. Un espacio topológico X se llama *espacio de Baire* si para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa.

4 Definición (conjunto denso en ninguna parte)**.** Sea X un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. Se dice que Y es *denso en ninguna parte*, si el interior de su cerradura es vacío.

5 Definición (conjunto magro)**.** Sea X un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. Se dice que Y es *magro* (o *conjunto de la primera categoría*) si existe una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Los conjuntos no magros también se llaman *conjuntos de la segunda categoría.*

6 Proposición (criterio de espacio de Baire)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *X es de Baire, esto es, para cualquier sucesión $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X, abiertos y densos, su intersección $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ también es densa;*

(b) *cualquier subconjunto magro de X tiene interior vacío, esto es, para cualquier sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte, el interior de su unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ es vacía.*

Demostración. Idea de demostración: aplicar las fórmulas de De Morgan y la fórmula $X \setminus \operatorname{cl}(Y) = \operatorname{int}(X \setminus Y)$.

Supongamos (a) y demostremos (b). Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte y sea $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $U_k \coloneqq X \setminus \operatorname{cl}(E_k)$. $\operatorname{cl}(U_k) = X \setminus \operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = X$, así que $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos abiertos densos. Por la condición (a),

$$\operatorname{cl}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = X.$$

Luego

$$\operatorname{int}(D) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus U_k)\right) = \varnothing.$$

Supongamos (b) y demostremos (a). Sea $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X, abiertos y densos. Para cada k en $\mathbb{N}$ pongamos $E_k \coloneqq X \setminus U_k$. Entonces $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(E_k)) = X \setminus \operatorname{cl}(\operatorname{int}(U_k)) = \varnothing$, así que $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte. Por la condición (b),

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \varnothing,$$

luego

$$\operatorname{cl}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) = \operatorname{cl}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (X \setminus E_k)\right) = \operatorname{cl}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right) = X \setminus \operatorname{int}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = X. \quad \square$$