Espacios de funciones de variación acotada y espacios de funciones absolutamente continuas (un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de septiembre de 2022

Objetivo:

- introducir los espacios normados $\mathrm{BV}([a, b])$ y $\mathrm{AC}([a, b])$,
- demostrar su completez.

Objetivo:

- introducir los espacios normados $\mathrm{BV}([a,b])$ y $\mathrm{AC}([a,b])$,
- demostrar su completez.

Prerrequisitos:

- la variación total de una función,
- función de variación acotada,
- función absolutamente continua.

Plan

1. Espacio de funciones de variación acotada

2. Espacio de funciones absolutamente continuas

Particiones de $[a, b]$

En este tema suponemos que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Particiones de $[a, b]$

En este tema suponemos que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Una tupla $\tau = (\tau_0, tau_1, \ldots, \tau_m)$ se llama partición del intervalo $[a, b]$, si

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = b.$$

Denotemos por $\mathcal{P}(a, b)$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

La variación de una función asociada a una partición de $[a, b]$

Definición

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ y sea τ en $\mathcal{P}(a, b)$, con

$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m), \qquad a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = b.$$

Pongamos

$$S_{\text{abs}}(f, \tau) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

Propiedades de S_{abs}

Ejercicio. Sean $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathcal{P}(a, b)$. Demostrar que

$$S_{\mathrm{abs}}(f + g, \tau) \le S_{\mathrm{abs}}(f, \tau) + S_{\mathrm{abs}}(g, \tau),$$

$$S_{\mathrm{abs}}(f, \tau) = |\lambda|\, S_{\mathrm{abs}}(f, \tau).$$

Ejercicio. Sean $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$, $a < x < b$,

$$\tau = (a, x, b).$$

Demostrar que

$$|f(x)| \le |f(a)| + S_{\mathrm{abs}}(f, \tau).$$

La variación total de una función

Definición

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

$$\operatorname{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\text{abs}}(f,\tau).$$

La variación total de una función

Definición

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

$$\operatorname{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

Ejercicio. Demostrar que Var_a^b es subaditiva y absolutamente homogénea.

La variación total de una función

Definición

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$.

$$\operatorname{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau \in \mathcal{P}(a,b)} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau).$$

Ejercicio. Demostrar que Var_a^b es subaditiva y absolutamente homogénea.

Ejercicio. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Demostrar que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ es una constante.}$$

Funciones de variación acotada

$$\mathrm{BV}([a,b]) := \left\{ f \in \mathbb{C}^{[a,b]} : \quad \mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty \right\}.$$

Funciones de variación acotada

$$\operatorname{BV}([a,b]) := \left\{ f \in \mathbb{C}^{[a,b]}: \quad \operatorname{Var}_a^b(f) < +\infty \right\}.$$

Ejercicio. Demostrar que $\operatorname{BV}([a,b]) \subseteq B([a,b])$.

La norma en $\mathrm{BV}([a,b])$

Para cada f en $\mathrm{BV}([a,b])$, pongamos

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} \coloneqq \mathrm{Var}_a^b(f) + \|f\|_{\sup}.$$

La norma en $\mathrm{BV}([a, b])$

Para cada f en $\mathrm{BV}([a, b])$, pongamos

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} := \mathrm{Var}_a^b(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Demostrar que $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ es una norma.

La norma en $\mathrm{BV}([a, b])$

Para cada f en $\mathrm{BV}([a, b])$, pongamos

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} := \mathrm{Var}_a^b(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Demostrar que $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ es una norma.

Si no se dice otra cosa, entonces $\mathrm{BV}([a, b])$ se considera con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$.

Completez de $\mathrm{BV}([a, b])$

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{BV}([a, b])$ es completo.

Completez de $\mathrm{BV}([a, b])$

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{BV}([a, b])$ es completo.

Sugerencias.

- Mostrar que si $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy en $\mathrm{BV}([a, b])$, entonces f es una sucesión de Cauchy en $B([a, b])$.
- Mostrar que existe $g\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\|f_n - g\|_{\sup} \le 2^{-n}$ para cada n en $\mathbb{N}$.
- Mostrar que $S_{\mathrm{abs}}(g - f_n, \tau) \le 2^{-n}$ para cada τ en $\mathcal{P}(a, b)$ y cada n en $\mathbb{N}$.
- Mostrar que $\mathrm{Var}_a^b(g - f_n) \le 2^{-n}$ para cada n en $\mathbb{N}$.
- Mostrar que $g \in \mathrm{BV}([a, b])$ y $\|f_n - g\|_{\mathrm{BV}} \le 2^{-n+1}$ para cada n en $\mathbb{N}$.

Plan

Funciones absolutamente continuas

Definición

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Se dice que f es absolutamente continua, si
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
para cada familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$,

$$\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| < \varepsilon.$$

Funciones absolutamente continuas

Definición

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Se dice que f es absolutamente continua, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$,

$$\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^n |f(d_j) - f(c_j)| < \varepsilon.$$

$\mathrm{AC}([a,b]) :=$ el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas $[a,b] \to \mathbb{C}$.

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq B([a,b]) \cap C([a,b]) \cap \mathrm{BV}([a,b])$

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b])$ es un subespacio vectorial de $B([a,b])$.

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq B([a,b]) \cap C([a,b]) \cap \mathrm{BV}([a,b])$

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b])$ es un subespacio vectorial de $B([a,b])$.

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

$\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq B([a,b]) \cap C([a,b]) \cap \mathrm{BV}([a,b])$

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b])$ es un subespacio vectorial de $B([a,b])$.

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq C([a,b])$.

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b]) \subseteq \mathrm{BV}([a,b])$.

Criterio de funciones absolutamente continuas

Ejercicio. Recordar el segundo teorema fundamental de cálculo, en el contexto de funciones absolutamente continuas.

Criterio de funciones absolutamente continuas

Ejercicio. Recordar el segundo teorema fundamental de cálculo, en el contexto de funciones absolutamente continuas.

Ejercicio. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Recordar una demostración del criterio:

$$f \in \mathrm{AC}([a,b]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in L^1([a,b]) \qquad \forall x \in [a,b] \qquad f(x) = f(a) + \int_a^x g.$$

Criterio de funciones absolutamente continuas

Ejercicio. Recordar el segundo teorema fundamental de cálculo, en el contexto de funciones absolutamente continuas.

Ejercicio. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Recordar una demostración del criterio:

$$f \in \mathrm{AC}([a,b]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in L^1([a,b]) \qquad \forall x \in [a,b] \qquad f(x) = f(a) + \int_a^x g.$$

Ejercicio. Sea $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que

$$\mathrm{Var}_a^b(f) = \int_a^b |f'|.$$

AC$([a,b])$ es cerrado en BV$([a,b])$

Ejercicio. Demostrar que AC$([a,b])$ es un subespacio cerrado de BV$([a,b])$.

$\mathrm{AC}([a,b])$ es cerrado en $\mathrm{BV}([a,b])$

Ejercicio. Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b])$ es un subespacio cerrado de $\mathrm{BV}([a,b])$.

Si no se dice otra cosa, entonces $\mathrm{AC}([a,b])$ se considera con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ restringida.

AC([a, b]) es cerrado en BV([a, b])

Ejercicio. Demostrar que AC([a, b]) es un subespacio cerrado de BV([a, b]).

Si no se dice otra cosa, entonces AC([a, b]) se considera con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ restringida.

AC([a, b]) es un espacio de Banach.