La identidad de paralelogramo y la identidad de Apolonio

Rocio Daniela Pérez Cruz, Paolo Alejando Balam Aguilar Mata,
Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

21 de mayo de 2022

Objetivos y prerrequisitos

Objetivos:

- demostrar la identidad de paralelogramo;
- deducir la identidad Apolonio a partir de la identidad de paralelogramo;
- conocer un par de aplicaciones geométricas relacionadas con la convexidad estricta.

Objetivos y prerrequisitos

Objetivos:

- demostrar la identidad de paralelogramo;
- deducir la identidad Apolonio a partir de la identidad de paralelogramo;
- conocer un par de aplicaciones geométricas relacionadas con la convexidad estricta.

Prerrequisitos:

- propiedades elementales de productos internos.

La identidad de paralelogramo

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo con producto interno.

La identidad de paralelogramo

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo con producto interno.

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\Big(\|a\|^2 + \|b\|^2\Big).$$

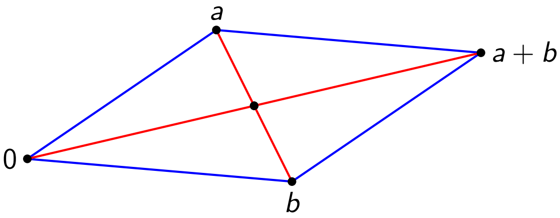
La identidad de paralelogramo

En este tema suponemos que H es un espacio vectorial complejo con producto interno.

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\Big(\|a\|^2 + \|b\|^2\Big).$$



Demostración

$$\|a + b\|^2$$

Demostración

$$\|a + b\|^2 =$$

Demostración

$$\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle$$

Demostración

$$\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle =$$

Demostración

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Demostración

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Después de simplificar,

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Demostración

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Después de simplificar,

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Ponemos $-b$ en vez de b:

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Demostración

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Después de simplificar,

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Ponemos $-b$ en vez de b:

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Sumamos las últimas dos identidades:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2$$

Demostración

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle.$$

Después de simplificar,

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Ponemos $-b$ en vez de b:

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \|b\|^2.$$

Sumamos las últimas dos identidades:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 =$$

Demostración

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle.$$

Después de simplificar,

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle a,b\rangle) + \|b\|^2.$$

Ponemos $-b$ en vez de b:

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a,b\rangle) + \|b\|^2.$$

Sumamos las últimas dos identidades:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\Big(\|a\|^2 + \|b\|^2\Big).$$

La identidad de Apolonio

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

La identidad de Apolonio

Proposición

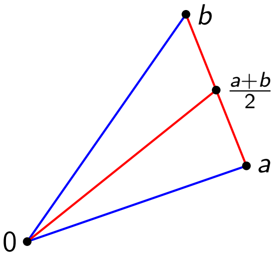
Sean $a, b \in H$. Entonces

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

Otras formas equivalentes de la identidad de Apolonio:

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo y la didimos entre 2:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} + \frac{\|a-b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo y la didimos entre 2:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} + \frac{\|a-b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Transformamos por separado el primer sumando usando la propiedad absolutamente homogénea de la norma:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} =$$

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo y la didimos entre 2:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} + \frac{\|a-b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Transformamos por separado el primer sumando usando la propiedad absolutamente homogénea de la norma:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} = \frac{2}{4}\,\|a+b\|^2 =$$

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo y la didimos entre 2:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} + \frac{\|a-b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Transformamos por separado el primer sumando usando la propiedad absolutamente homogénea de la norma:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} = \frac{2}{4}\,\|a+b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo y la didimos entre 2:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} + \frac{\|a-b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Transformamos por separado el primer sumando usando la propiedad absolutamente homogénea de la norma:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} = \frac{2}{4}\,\|a+b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Obtenemos la identidad

Demostración de la identidad de Apolonio

Recordamos la identidad de paralelogramo y la didimos entre 2:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} + \frac{\|a-b\|^2}{2} = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Transformamos por separado el primer sumando usando la propiedad absolutamente homogénea de la norma:

$$\frac{\|a+b\|^2}{2} = \frac{2}{4}\,\|a+b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Obtenemos la identidad

$$2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

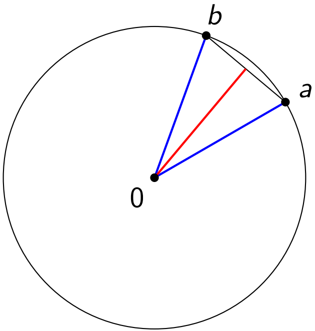
Ejercicio

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

Sean $a, b \in H$ tales que $\|a\| = \|b\|$ y $a \neq b$.

Demostrar que

$$\left\| \frac{1}{2}(a+b) \right\| < \|a\|.$$



Conjuntos estrictamentes convexos

Definición

Sea V un espacio normado complejo y sea $X \subseteq V$.

Se dice que X es estrictamente convexo,

si para cada a, b en X con $a \neq b$ y cada λ en $(0, 1)$

la combinación convexa $(1 - \lambda)a + \lambda b$ pertenece al interior de X.

La bola unitaria cerrada en el espacio con producto interno es estrictamente convexa

Ejercicio.

Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno.

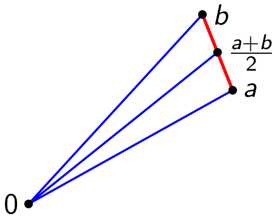
Sean $a, b \in H$ tales que $\|a\| \le 1$, $\|b\| \le 1$, $a \ne b$, y sea $\lambda \in (0, 1)$.

Demostrar que

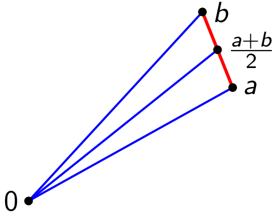
$$\|(1 - \lambda)a + \lambda b\| < 1.$$

Una consecuencia de la identidad de Apolonio

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$



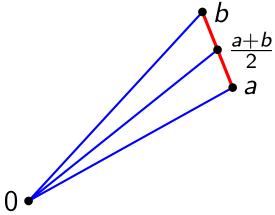
Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

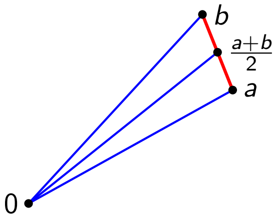
$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Si $\gamma \geq 0$,

$$\|a\| \approx \gamma, \qquad \|b\| \approx \gamma, \qquad \left\|\frac{a+b}{2}\right\| \approx \gamma,$$

entonces

Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

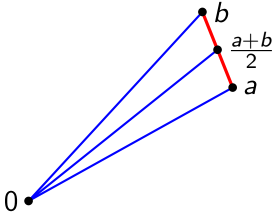
Si $\gamma \geq 0$,

$$\|a\| \approx \gamma, \qquad \|b\| \approx \gamma, \qquad \left\|\frac{a+b}{2}\right\| \approx \gamma,$$

entonces

$$\|a-b\| \approx$$

Una consecuencia de la identidad de Apolonio



$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

$$\|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Si $\gamma \geq 0$,

$$\|a\| \approx \gamma, \qquad \|b\| \approx \gamma, \qquad \left\|\frac{a+b}{2}\right\| \approx \gamma,$$

entonces

$$\|a-b\| \approx 0.$$