El conjunto de los subconjuntos del tamaño dado

Estos apuntes están redactados por Katia Anahí López Avendaño y Egor Maximenko.

En estos apuntes introducimos el conjunto $\mathcal{S}_{n,m}$, demostramos una fórmula recursiva para $\mathcal{S}_{n,m}$ y demostramos una fórmula para el número de elementos de $\mathcal{S}_{n,m}$.

Sea $\mathbb{N}_0 \coloneqq \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Dado un conjunto finito A, denotamos por $\#A$ el tamaño de A, esto es, el número de los elementos de A.

Definición de $\mathcal{S}_{n,m}$

1 Definición. Dados n, m en $\mathbb{N}_0$, denotamos por $\mathcal{S}_{n,m}$ al conjunto de todos los m-subconjuntos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$:

$$\mathcal{S}_{n,m} \coloneqq \Big\{ A \subseteq \{1, \ldots, n\} \colon\ \#A = m \Big\}.$$

2 Ejemplo. Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{2,0} &= \big\{ \varnothing \big\}, \\
\mathcal{S}_{2,1} &= \big\{ \{1\}, \{2\} \big\}, \\
\mathcal{S}_{2,2} &= \big\{ \{1, 2\} \big\}.
\end{aligned}$$

3 Ejemplo. Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{3,0} &= \big\{ \varnothing \big\}, \\
\mathcal{S}_{3,1} &= \big\{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \big\}, \\
\mathcal{S}_{3,2} &= \big\{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \big\}, \\
\mathcal{S}_{3,3} &= \big\{ \{1, 2, 3\} \big\}.
\end{aligned}$$

4 Proposición. *Para cualquier n en $\mathbb{N}_0$,*

$$\mathcal{S}_{n,0} = \big\{ \varnothing \big\}.$$

Demostración. En efecto, el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tiene un único subconjunto de tamaño 0: el conjunto vacío. $\square$

5 Proposición. *Para cualesquiera n, m en $\mathbb{N}_0$ tales que $m > n$,*

$$\mathcal{S}_{n,m} = \varnothing.$$

Demostración. Sabemos que $\{1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito con tamaño n. Si $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$, necesariamente $\#A \leq n$. Es decir, no existe un conjunto $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con $\#B > n$.

$$\therefore \mathcal{S}_{n,m} = \varnothing.$$

□

La fórmula recursiva para el conjunto de los subconjuntos del tamaño dado

6 Teorema. *Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Entonces,*

$$\mathcal{S}_{n+1,m+1} = \mathcal{S}_{n,m+1} \cup \Big\{A \cup \{n+1\} : \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\Big\}. \tag{1}$$

Más aún,

$$\mathcal{S}_{n,m+1} \cap \Big\{A \cup \{n+1\} : \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\Big\} = \varnothing. \tag{2}$$

Demostración. Si $m > n$, el resultado es inmediato.

Supongamos $n \geq m$.

Denotemos por D al conjunto $\{A \cup \{n+1\} : \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\}$.

$\supseteq$. Sea $B \in \mathcal{S}_{n,m+1} \cup D$, entonces $B \in \mathcal{S}_{n,m+1}$ o $B \in D$.

Caso 1. Si $B \in \mathcal{S}_{n,m+1}$, se tiene que $\#B = m + 1$ y

$$B \subseteq \{1, \ldots, n\} \subseteq \{1, \ldots, n+1\},$$

por lo que $B \in \mathcal{S}_{n+1,m+1}$.

Caso 2. Si $B \in D$, existe un $C \in \mathcal{S}_{n,m}$ tal que $B = C \cup \{n+1\}$.

Dado que $C \cap \{n+1\} = \varnothing$, entonces $\#B = m + 1$. Además, $B \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{S}_{n+1,m+1}$.

$$\therefore \mathcal{S}_{n,m+1} \cup \Big\{A \cup \{n+1\} : \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\Big\} \subseteq \mathcal{S}_{n+1,m+1}.$$

$\subseteq$. Sea $X \in \mathcal{S}_{n+1,m+1}$. Consideremos dos casos.

Caso 1. Si $n+1 \notin X$, entonces $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y $\#X = m+1$ (pues $X \in \mathcal{S}_{n+1,m+1}$). Por lo tanto, $X \in \mathcal{S}_{n,m+1}$.

Luego, $X \in \mathcal{S}_{n,m+1} \cup D$.

Caso 2. Si $n+1 \in X$, definimos $A \coloneqq X \setminus \{n+1\}$. Entonces,

$$X = A \cup \{n+1\}.$$

Tenemos que $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y $\#A = m$, por eso $A \in \mathcal{S}_{n,m}$. Además, $X = A \cup \{n+1\}$. Hemos demostrado que $X \in D$. Luego, $X \in \mathcal{S}_{n,m+1} \cup D$.

$$\therefore \mathcal{S}_{n+1,m+1} \subseteq \mathcal{S}_{n,m+1} \cup \big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}.$$

$$\therefore \mathcal{S}_{n+1,m+1} = \mathcal{S}_{n,m+1} \cup \big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}.$$

Dado X en $\mathcal{S}_{n+1,m+1}$, se cumple exactamente uno de los casos $n+1 \notin X$ y $n+1 \in X$. En otras palabras, estos dos casos son exclusivos. Como vimos arriba, en el primer caso $X \in \mathcal{S}_{n,m+1}$, y en el segundo caso $X \in D$.

$$\therefore \mathcal{S}_{n,m+1} \cap \big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\} = \varnothing.$$

□

7 Ejemplo. Ilustremos el Teorema 6 con un ejemplo. Para $n = 3$, $m = 2$,

$$\mathcal{S}_{n+1,m+1} = \mathcal{S}_{4,3} = \big\{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\big\}.$$

Separamos los conjuntos en $\mathcal{S}_{4,3}$ que contienen al 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4,3} &= \big\{\{1,2,3\}\big\} \cup \big\{\{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\big\} \\ &= \big\{\{1,2,3\}\big\} \cup \big\{\{1,2\} \cup \{4\}, \{2,3\} \cup \{4\}, \{1,3\} \cup \{4\}\big\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3,2} &= \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\big\}, \\ \mathcal{S}_{3,3} &= \big\{\{1,2,3\}\big\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_{4,3} = \mathcal{S}_{3,3} \cup \big\{A \cup \{4\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{3,2}\big\}.$$

Observe que un análogo de la proposición anterior no necesariamente se cumple al intercambiar m por n en el segundo conjunto de la derecha.

8 Ejercicio. En el Teorema 6 es importante no confundir las variables n, m. Muestre que el conjunto $\mathcal{S}_{n+1,m+1}$ no siempre está contenido en

$$\mathcal{S}_{n,m+1} \cup \big\{A \cup \{m+1\}\colon\ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}.$$

9 Ejemplo. Consideremos $n = 3$, $m = 1$. Además, restrinjamos $\{A \cup \{m+1\}\colon\ A \in \mathcal{S}_{n,m}\}$ a $D = \{A \cup \{m+1\} \mid A \in \mathcal{S}_{n,m}\colon A \cap \{m+1\} = \varnothing\}$.
Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{n,m} &= \mathcal{S}_{3,1} = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\big\},\\
\mathcal{S}_{n+1,m+1} &= \mathcal{S}_{4,2} = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\big\},\\
\mathcal{S}_{n,m+1} &= \mathcal{S}_{3,2} = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\big\},\\
D &= \big\{\{1,2\}, \{2,3\}\big\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D \cap \mathcal{S}_{3,2} \neq \varnothing.$$

Más aún,

$$\mathcal{S}_{4,2} \neq \mathcal{S}_{3,2} \cup D.$$

Nota: si se elimina la restricción, existirán elementos $B_i \in \{A \cup \{m+1\}\colon\ A \in \mathcal{S}_{n,m}\}$, $i \in I$ (donde I es un conjunto de índices finito) con $\#B_i = m$, por lo que $B_i \notin \mathcal{S}_{n+1,m+1}$ $\forall i \in I$.

10 Corolario. *Sea* $n \in \mathbb{N}_0$. *Entonces,*

$$\mathcal{S}_{n+1,n+1} = \big\{A \cup \{n+1\}\colon\ A \in \mathcal{S}_{n,n}\big\}.$$

Por el Teorema 6, $\mathcal{S}_{2,1}$ se obtiene de $\mathcal{S}_{1,0}$ y $\mathcal{S}_{1,1}$. Lo marcamos con flechas en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{0,0} \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
\mathcal{S}_{1,0} \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{S}_{1,1} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathcal{S}_{2,0} \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{S}_{2,1} \arrow[d] \arrow[dr] & \mathcal{S}_{2,2} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathcal{S}_{3,0} & \mathcal{S}_{3,1} & \mathcal{S}_{3,2} & \mathcal{S}_{3,3}
\end{tikzcd}$$

11 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}$,*

$$\mathcal{S}_{n,n} = \Big\{A \cup \{n\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n-1,n-1}\Big\}.$$

Demostración. Se demuestra fácilmente por inducción sobre n, usando el Corolario 10. $\square$

Número de elementos en el conjunto $\mathcal{S}_{n,m}$

12 Proposición. *Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Entonces,*

$$\#\Big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\Big\} = \#\mathcal{S}_{n,m}.$$

Demostración. Definimos $f \colon \mathcal{S}_{n,m} \to \big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}$,

$$f(A) \coloneqq A \cup \{n+1\}.$$

Por la definición del codominio, f es sobre. Mostremos que f es inyectiva.

Sean $B, C \in \mathcal{S}_{n,m}$ tales que $f(B) = f(C)$. Entonces, $B \cup \{n+1\} = C \cup \{n+1\}$.

Dado que $B \cap \{n+1\} = \varnothing$ y $C \cap \{n+1\} = \varnothing$, se tiene que $B = C$.

Por lo tanto, f es inyectiva.

$\therefore f$ es biyectiva.

$$\therefore \#\big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\} = \#\mathcal{S}_{n,m}.$$

$\square$

13 Proposición. *Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Entonces,*

$$\#\mathcal{S}_{n+1,m+1} = \#\mathcal{S}_{n,m} + \#\mathcal{S}_{n,m+1}.$$

Demostración. Se tiene, de acuerdo con el Teorema 6,

$$\mathcal{S}_{n+1,m+1} = \mathcal{S}_{n,m+1} \cup \big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}.$$

Dado que $\mathcal{S}_{n,m+1}$ y $\big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}$ son disjuntos (y finitos),

$$\#\mathcal{S}_{n+1,m+1} = \#\mathcal{S}_{n,m+1} + \#\big\{A \cup \{n+1\} \colon \ A \in \mathcal{S}_{n,m}\big\}.$$

Utilizando la proposición 12, obtenemos:

$$\#\mathcal{S}_{n+1,m+1} = \#\mathcal{S}_{n,m} + \#\mathcal{S}_{n,m+1}.$$

$\square$

Recordemos rápidamente el concepto de los coeficientes binomiales. Hay que varias definiciones equivalentes. En estos apuntes, seguimos la definición algebraica explicada en [1, Chapter 5].

14 Definición. Sea $x \in \mathbb{C}$ y sea $m \in \mathbb{N}_0$. Definimos

$$\binom{x}{m} := \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (x-k).$$

15 Ejemplo.

$$\begin{aligned}
\binom{x}{0} &= 1, \\
\binom{x}{1} &= x, \\
\binom{x}{2} &= \frac{x(x-1)}{2!}, \\
\binom{x}{3} &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.
\end{aligned}$$

16 Ejemplo. Utilizando la expresión del ejemplo anterior, obtenemos:

$$\binom{2}{3} = \frac{2(2-1)(2-2)}{3!} = 0.$$

17 Proposición. *Si $n, m \in \mathbb{N}_0$ y $m > n$, entonces*

$$\binom{n}{m} = 0.$$

Demostración. Considere la definición de $\binom{n}{m}$.
Si $n = 0$, entonces no hay nada que demostrar. Supongamos que $n \neq 0$.

Dado que $m - 1 \geq n$, entonces basta observar el término cuando $k = n$.

$$\binom{n}{m} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n-k) = \frac{1}{m!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (n-k) \right) (n-n) \left(\prod_{k=n+1}^{m-1} (n-k) \right) = 0.$$

$\square$

18 Proposición (fórmula recursiva para los coeficientes binomiales)**.** *Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Entonces,*

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}. \tag{3}$$

Demostración. Sea

$$\alpha \coloneqq \frac{1}{(m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (n-k).$$

Primero, expresemos el lado izquierdo de (3) en términos de α.

Utilizando la definición del coeficiente binomial, se tiene:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m+1} &= \frac{1}{(m+1)!} \prod_{k=0}^{m} ((n+1)-k) = \frac{1}{(m+1)!}(n+1) \prod_{k=1}^{m} (n+1-k) \\ &= \frac{1}{(m+1)!}(n+1) \prod_{k=1}^{m} (n-(k-1)).\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $j = k - 1$:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m+1} &= \frac{1}{(m+1)!}(n+1) \prod_{j=0}^{m-1} (n-j) \\ &= (n+1)\,\alpha.\end{aligned}$$

De este modo,

$$\binom{n+1}{m+1} = (n+1)\alpha \tag{4}$$

Luego, expresemos los sumandos en el lado derecho de (3) en términos de α:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n-k) = \frac{m+1}{(m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (n-k) = (m+1)\,\alpha, \\ \binom{n}{m+1} &= \frac{1}{(m+1)!} \prod_{k=0}^{m} (n-k) = \frac{(n-m)}{(m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (n-k).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\binom{n}{m} = (m+1)\alpha, \tag{5}$$

$$\binom{n}{m+1} = (n-m)\alpha. \tag{6}$$

Note que

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m+1} &= (n+1)\alpha = (n+1+(m-m))\alpha \\ &= ((m+1)+(n-m))\alpha = (m+1)\alpha + (n-m)\alpha.\end{aligned}$$

Aplicando (5) y (6), finalmente, se obtiene:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}.$$

$\square$

19 Proposición. *Para cualesquiera n, m en $\mathbb{N}_0$,*

$$\#\mathcal{S}_{n,m} = \binom{n}{m}.$$

Demostración. Reformulamos el enunciado de la siguiente manera:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad \underbrace{\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \#\mathcal{S}_{n,m} = \binom{n}{m}}_{\mathcal{A}_n}.$$

Demostremos por inducción sobre n que $\mathcal{A}_n$ se cumple para cada n en $\mathbb{N}_0$.

Demostremos $\mathcal{A}_0$. Consideremos el conjunto $\mathcal{S}_{0,m}$. Se tienen dos casos.

Caso 1.1. Si $m = 0$, entonces, por la proposición 4, se tiene: $\mathcal{S}_{0,0} = \{\varnothing\}$. Entonces,

$$\#\mathcal{S}_{0,0} = 1 = \binom{0}{0}.$$

Caso 1.2. Si $m \geq 1$, entonces, por la proposición 5, se tiene: $\mathcal{S}_{0,m} = \varnothing$. Por lo que

$$\#\mathcal{S}_{0,m} = 0 = \binom{0}{m}.$$

$$\therefore \quad \#\mathcal{S}_{0,m} = \binom{0}{m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Supongamos $\mathcal{A}_n$ y demostremos $\mathcal{A}_{n+1}$. Consideremos dos casos: $m = 0$ y $m \geq 1$.

Caso 2.1. Sea $m = 0$. Entonces, por la proposición 4,

$$\#\mathcal{S}_{n,0} = 1 = \binom{n}{0}.$$

Caso 2.2. Sea $m \geq 1$. Por la proposición 13,

$$\#\mathcal{S}_{n+1,m} = \#\mathcal{S}_{n,m} + \#\mathcal{S}_{n,m-1}.$$

De la hipótesis de inducción, $\#\mathcal{S}_{n,k} = \binom{n}{k}$ para cada k en $\mathbb{N}$. Aplicamos esta fórmula con $k = m$ y con $k = m - 1$. De este modo,

$$\#\mathcal{S}_{n+1,m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

Utilizando la proposición 18, finalmente obtenemos:

$$\#\mathcal{S}_{n+1,m} = \binom{n+1}{m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Por el principio de inducción hemos demostrado que $\mathcal{A}_n$ se cumple para cada n en $\mathbb{N}_0$.

$$\therefore \quad \#\mathcal{S}_{n,m} = \binom{n}{m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

□

Referencias

[1] Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. (1994): Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd. ed. Addison-Wesley, Reading, MA.