Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Posgrado en Ciencias Físicomatemáticas

Línea de Matemáticas

Lista de problemas de álgebra, 2016

Egor Maximenko: En mi opinión, cualquier estudiante de maestría o doctorado, cuya área de investigación está relacionada con análisis o con álgebra lineal, debe resolver la mayor parte de los siguientes problemas de álgebra. Casi todos estos problemas son bien conocidos, los encontré en varias fuentas. Esta lista casi no incluye problemas de la teoría de grupos, anillos y campos.

Números complejos y polinomios de una variable

Problema 1. Sea $-1 < a < 1$. Mostrar que la ecuación $4z^3 - 3z + a = 0$ tiene tres raíces reales diferentes. Expresar estas raíces a través de $\cos(\phi)$ y $\operatorname{sen}(\phi)$, donde $\phi = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(a)$.

Problema 2. Sea $x \in \mathbb{R}$. Calcular las sumas

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n}\cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(kx).$$

Problema 3. Sean $P_0, \ldots, P_{n-1}$ los vértices de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 1. Denotemos por $|\overrightarrow{P_0P_k}|$ la longitud del vector $\overrightarrow{P_0P_k}$, esto es, la longitud del segmento P_0P_k. Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n-1}|\overrightarrow{P_0P_k}| = n.$$

Problema 4. Sean $x, a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Calcular las sumas

$$\sum_{k=0}^{n} a^k\cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n} a^k\operatorname{sen}(kx).$$

Problema 5. Sea ε una n-ésima raíz de la unidad, es decir, un número real o complejo tal que $\varepsilon^n = 1$. Calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\varepsilon^k.$$

Problema 6. Calcular las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n} k\operatorname{sen}(kx).$$

Problema 7. Calcular las sumas

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\cos\frac{2k\pi}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

Problema 8. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Para cada una de las siguientes condiciones encontrar el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen esta condición:

$$|z - z_1| = |z - z_2|, \quad |z - z_1| + |z - z_2| = 1, \quad |z - z_1| - |z - z_2| = 1, \quad |z - z_1| = \operatorname{Re}(z).$$

Problema 9. Sea $\mathbb{F}$ un campo infinito, sea P un polinomio de una variable con coeficientes pertenecientes a $\mathbb{F}$, y sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{F}$, tal que para cada $a \in A$ se tiene $P(a) = 0$. Demostrar que P es el polinomio nulo, esto es, todos los coeficientes de P son cero. Mostrar que este resultado no se cumple, si $\mathbb{F}$ es un campo finito.

Problema 10. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números complejos diferentes a pares y sean $v_1, \ldots, v_n$ números complejos. Hallar un polinomio P de grado $\leq n-1$ tal que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(a_j) = v_j.$$

Problema 11. Sea P un polinomio de grado d de una variable compleja y sea n un entero positivo, $n > d$. Demostrar que $P(0)$ es el promedio de los valores de P en las raíces de la unidad de orden n.

Problema 12. Calcular el producto:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}.$$

Problema 13. Calcular el cuadrado de la matriz S_n de tamaño $n \times n$ cuya entrada (j,k) es $\operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1}$. En otras palabras, calcular S_n^2, donde

$$S_n = \left[\operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j,k=1}^{n}.$$

Vectores, matrices y espacios vectoriales

Problema 14. Consideramos el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ de los polinomios de una variable con coeficientes complejos, de grado ≤ 2. Mostrar que los polinomios

$$b_0(x) := 1, \qquad b_1(x) := x - 3, \qquad b_2(x) = x^2 - 6x + 9,$$

forman una base de este espacio, la cual denotemos por $\mathcal{B}$. Además denotemos por $\mathcal{E}$ a la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$. Encontrar las matrices de cambio entre estas dos bases. Dado un polinomio general $f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, calcular sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$.

Problema 15. Hallar una base del espacio de las matrices reales antisimétricas de tamaño 3×3.

Problema 16. Hallar el conjunto $\{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \colon \ AX = XA\}$, donde A es una matriz diagonal 3×3 con las entradas diagonales diferentes a pares.

Problema 17. Hallar el conjunto $\{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \colon \ AX = XA\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 18. Para cada valor del parámetro p resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales para dos incógnitas:

$$2x_1 - 3x_2 = p, \qquad -4x_1 + 6x_2 = 10.$$

Problema 19. Para cada valor del parámetro p resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales para dos incógnitas:

$$px_1 + 4x_2 = 2, \qquad 9x_1 + px_2 = 3.$$

Matrices

Problema 20. Sea A una matriz cuadrada triangular inferior invertible. Demostrar que su inversa también es triangular inferior.

Problema 21. Sea P el conjunto de todos los conmutadores del álgebra $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$:

$$P = \{AB - BA\colon\ A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})\}.$$

Denotemos por S al subespacio del espacio $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ generado por el conjunto P. Calcular la dimensión de S. Sugerencia: primero encontrar una descripción explícita de S.

Problema 22. Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Deducir una fórmula para el determinante de la matriz de Vandermonde $V(x_1, \ldots, x_n) := \left[x_j^{k-1}\right]_{j,k=1}^{n}$.

Problema 23. Sean a y b algunos números, $a \neq b$. Deducir una fórmula para el determinante de la siguiente matriz tridiagonal con diagonales constantes:

$$D_n = \begin{vmatrix} -(a+b) & ab & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -(a+b) & ab & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(a+b) & ab & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(a+b) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -(a+b) & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -(a+b) \end{vmatrix}.$$

Problema 24. Sea $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|a\|_2 = 1$. Consideremos la función $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como la proyección ortogonal del espacio $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por el vector a. Encontrar una fórmula para P y mostrar que P es un operador lineal. Hallar la matriz A asociada al operador lineal P respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Calcular los valores propios de A y explicar su sentido geométrico.

Problema 25. Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 1$. Demostrar que A se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\theta, x \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que esta descomposición es única.

Problema 26. Hallar la forma general de los elementos del subespacio S del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generado por las matrices F y G:

$$F = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una matriz $H \in S$ que tenga propiedad involutiva ($H^2 = I_2$) y tal que las matrices I_2, H formen una base de S.

Matrices y operadores lineales

Problema 27. Denotamos por $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ al espacio de todas las sucesiones complejas y consideramos el operador lineal $T\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definido mediante la regla

$$(Tx)_j := x_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}).$$

Investigar si T es invertible por la izquierda; por la derecha.

Problema 28. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz invertible por la derecha. Demostrar que A es invertible.

Problema 29. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Escribir al menos 20 condiciones equivalentes a la condición que la matriz A es invertible.

Problema 30. Sean V, W espacios vectoriales complejos, y sea $T\colon V \to W$ un operador lineal. Supongamos que el espacio V es de dimensión finita. Demostrar que

$$\dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V).$$

Problema 31. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Demostrar que

$$\operatorname{r}(AB) \le \min\{\operatorname{r}(A), \operatorname{r}(B)\}.$$

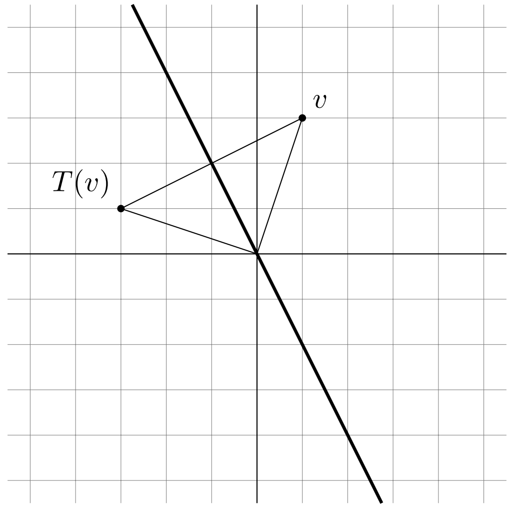
Problema 32. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, donde $m > n$. Demostrar que $AB \ne I_m$.

Problema 33. Demostrar que

$$\{uv^\top\colon\ u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{m\times 1}\},\ v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n\times 1}\}\} = \{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})\colon\ \operatorname{r}(A) = 1\}.$$

Problema 34. Sea $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|a\|_2 = 1$. Consideremos la función $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como la reflexión ortogonal del espacio $\mathbb{R}^2$ respecto al hiperplano $\{v \in \mathbb{R}^2\colon\ a^\top v = 0\}$. Encontrar una fórmula para R y mostrar que R es un operador lineal. Hallar la matriz B asociada al operador lineal R respecto a la base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $B^\top = B$ y $B^2 = I_2$. Calcular los valores propios de B y explicar su sentido geométrico.

Problema 35. El operador lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el operador de reflexión ortogonal respecto a la recta $2x + y = 0$:



Calcular su matriz asociada respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^2$. Calcular los valores y vectores propios del operador lineal T.

Valores propios y la función exponencial de matrices

Problema 36. Calcular $\exp(tA)$, donde A es cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 37. Sea P un polinomio de una variable con coeficientes complejos, de grado n. Construir una matriz compleja A de tamaño $n \times n$ cuyo polinomio característico coincida con el polinomio P.

Problema 38. Calcular $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Problema 39. Determinar para qué valores reales a, b la siguiente matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Problema 40. Encontrar los valores propios de la matriz $A = \left[A_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}$ cuyas entradas están definidas mediante la siguiente regla:

$$A_{j,k} := \begin{cases} 2, & \text{si } j = k; \\ -1, & \text{si } |j-k| = 1; \\ 0, & \text{si } |j-k| \geq 2. \end{cases}$$

Sugerencia: deducir una fórmula recursiva para los polinomios característicos de A, luego comparar con la definición de los polinomios de Chebyshov y usar un cambio de variable trigonométrico. Otro camino: usar el resultado del Problema 23.

Problema 41. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una matriz B tal que $A = \exp(B)$.

Operadores y matrices normales, autoadjuntos y unitarios

Problema 42. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Demostrar que existe una matriz unitaria U de tamaño $n \times n$ tal que la matriz U^*AU es triangular superior.

Problema 43. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz normal y al mismo tiempo triangular superior. Demostrar que la matriz A es diagonal.

Problema 44. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz normal. Demostrar que existe una matriz unitaria U de tamaño $n \times n$ tal que la matriz U^*AU es diagonal.

Problema 45. Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$ y sea $\omega_n = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}$. Demostrar que la siguiente matriz es unitaria:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Problema 46. Denotemos por S al conjunto de las matrices reales cuadradas simétricas de orden 2. Denotemos por $\cong$ a la relación binaria en S definida de la siguiente manera: $A \cong B$ si existe una matriz invertible P tal que $B = P^\top AP$. Mostrar que $\cong$ es una relación de equivalencia y calcular el número de las clases de equivalencia.

Problema 47. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz positiva definida, esto es,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \qquad x^\top Ax > 0.$$

Demostrar que existe una matriz real invertible B tal que $B\top B = A$.

Grupos y divisibilidad

Problema 48. Enunciar y demostrar el teorema pequeño de Fermat.

Problema 49. Sea p un número primo. Demostrar que el grupo multiplicativo del campo $\mathbb{Z}_p$ es cíclico.

Problema 50. Encontrar todos los subgrupos normales del grupo S_3.

Problema 51. Sea H un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Mostrar que H es denso en $\mathbb{R}$ o es de la forma $a\mathbb{Z}$ para algún $a > 0$.