

Independencia lineal de caracteres

Objetivos. Demostrar el teorema de Artin sobre la independencia lineal de caracteres, donde los caracteres se entienden como homomorfismos de un monoide al grupo multiplicativo de un campo.

Dado un campo K , denotamos por K^* el conjunto de sus elementos no nulos. K^* se considera con la operación de multiplicación y es un grupo.

Definición 1. Sea G un monoide y sea K un campo. Decimos que una función $f: G \rightarrow K^*$ es un *caracter* si f es un homomorfismo:

$$f(a + b) = f(a)f(b) \quad (a, b \in G),$$

Denotamos por 1_G al elemento neutro del monoide G . Denotamos por 0_K al elemento neutro aditivo del campo K y por 1_K al elemento neutro multiplicativo del campo K .

Proposición 2. Si $f: G \rightarrow K^*$ es un caracter, entonces $f(1_G) = 1_K$.

Demostración. Tenemos que $f(1_G) = f(1_G 1_G) = f(1_G)f(1_G)$. Como $f(1_G) \neq 0_K$, concluimos que $f(1_G) = 1_K$. $\square$

Dado un conjunto X y un campo K , el conjunto de funciones K^X es un espacio vectorial. Denotamos por 0_{K^X} la función constante 0. Una lista de funciones $(f_1, \dots, f_m)$ de clase K^X se llama *linealmente independiente* si para cada lista de escalares $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m$, la igualdad de funciones

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j f_j = 0_{K^X}$$

implica que $\lambda_j = 0_K$ para cada j en $\{1, \dots, m\}$.

Teorema 3. Sean G un monoide y K un campo. Para cada m en $\mathbb{N}$, si $f_1, \dots, f_m$ son caracteres $G \rightarrow K^*$ diferentes a pares, entonces son linealmente independientes.

Demostración. Para cada m en $\mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{A}(m)$ la siguiente afirmación: para cualesquiera m caracteres $f_1, \dots, f_m$ de clase $G \rightarrow K^*$, diferentes a pares, $(f_1, \dots, f_m)$ es linealmente independiente.

Aplicamos la inducción matemática sobre m .

Para $m = 1$, evaluando la igualdad $\lambda_1 f_1 = 0_{K^G}$ en el punto 1_G , obtenemos que $\lambda_1 = 0_K$.

Paso de inducción. Dado m en $\mathbb{N}$, supongamos $\mathcal{A}(m)$ y demostremos $\mathcal{A}(m+1)$. Sean $f_1, \dots, f_{m+1}$ caracteres diferentes a pares.

Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \in K$ tales que

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f_j = 0_{K^G}. \quad (1)$$

Como $f_m \neq f_{m+1}$, encontramos z en G tal que $f_m(z) \neq f_{m+1}(z)$. Para cada x en G , tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f_j(zx) = 0_K.$$

Como $f_1, \dots, f_{m+1}$ son homomorfismos, obtenemos la siguiente igualdad de funciones:

$$\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f_j(z) f_j = 0_{K^G}. \quad (2)$$

Dividimos esta igualdad entre el escalar no nulo $f_{m+1}(z)$:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j f_j(z)}{f_{m+1}(z)} f_j + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0_{K^G}. \quad (3)$$

De (1) restamos (3):

$$\sum_{j=1}^m \left(\lambda_j - \frac{\lambda_j f_j(z)}{f_{m+1}(z)} \right) f_j = 0_{K^G}.$$

Aplicamos la hipótesis de inducción $\mathcal{A}(m)$ a las funciones $f_1, \dots, f_m$. Concluimos que los escalares son cero:

$$\lambda_j \left(1 - \frac{f_j(z)}{f_{m+1}(z)} \right) = 0.$$

Como $f_m(z) \neq f_{m+1}(z)$, tenemos que $\lambda_m = 0$. Ahora en la identidad (1) podemos omitir el m -ésimo sumando:

$$\sum_{j \in \{1, \dots, m-1, m+1\}} \lambda_j f_j = 0_{K^G}.$$

Aplicamos la hipótesis de inducción $\mathcal{A}(m)$ a las funciones $f_1, \dots, f_{m-1}, f_{m+1}$ y concluimos que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = \lambda_{m+1} = 0$. $\square$

Corolario 4 (independencia lineal de las potencias). Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^*$ distintos. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ tales que para cada r en $\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_j^r = 0_K.$$

Entonces, $\lambda_j = 0$ para cada j en $\{1, \dots, m\}$.

Demostración. Consideramos el monoide $G = \mathbb{N}_0$ y las funciones $f_j(r) := \alpha_j^r$. Aplicamos el Teorema 3. $\square$

Corolario 5 (independencia lineal de las funciones exponenciales). Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ distintos. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \exp(\alpha_j x) = 0.$$

Entonces, $\lambda_j = 0$ para cada j en $\{1, \dots, m\}$.

Demostración. Consideramos el grupo $G = \mathbb{R}$ y las funciones $f_j(x) := \exp(\alpha_j x)$. Es fácil ver que estas funciones son diferentes a pares (por ejemplo, calculando sus derivadas en el punto 0). Por el Teorema 3, estas funciones son linealmente independientes. $\square$