Factorial

1. Definición del factorial de un número entero positivo. Dado un número entero positivo n, su *factorial* se define como el producto de los números enteros de 1 a n. Por ejemplo,

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

En general, podemos escribir la definición de $n!$ de la siguiente manera:

$$n! \coloneqq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Con la notación breve para productos,

$$n! \coloneqq \prod_{k=1}^{n} k.$$

2. Calcule los factoriales de los números de 1 a 4:

$$1! = 1 \qquad 2! = 1 \cdot 2 = \underbrace{\qquad}_{?}$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad 4! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}$$

3. Fórmula recursiva para $n!$. Notamos que

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 3! \cdot 4.$$

De manera similar,

$$5! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = \left(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}\right) \cdot 5 = \underbrace{\qquad}_{?} \cdot 5.$$

En general, $n!$ se expresa a través de $(n-1)!$ mediante la siguiente fórmula:

$$n! = (n-1)!\, n.$$

A veces es necesario escribir $(n+1)!$ en términos de $n!$:

$$(n+1)! = \underbrace{\qquad}_{?} \cdot (n+1).$$

¿Cómo definir el factorial del número cero?

4. Factorial de 1 (repaso). Recordemos que

$$1! = \underbrace{\qquad}_{?}$$

5. Motivación para definir 0!. Ya vimos que la función factorial satisface la fórmula recursiva

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!. \tag{1}$$

Esta igualdad se cumple para cada n entero positivo: $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vamos a definir el factorial del número 0 de tal manera que la igualdad (1) se cumplirá no solamente para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sino también para $n = 0$.

Ejercicio creativo: antes de resolver los siguientes ejercicios intente de determinar qué valor hay que asignar a 0! para que la igualdad (1) se cumpla para $n = 0$.

6. Definición de 0!, sugerencia más directa. En la fórmula

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

ponemos $n = 0$:

$$\underbrace{\qquad\quad}_{?} = \underbrace{\qquad\quad}_{?} \cdot 0!$$

Recordamos que $1! = \underbrace{\qquad}_{?}$ y simplificamos la igualdad anterior:

$$\underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?} \cdot 0!.$$

Despeje 0!.

7. Definición de 0! (respuesta de los ejercicios anteriores).

$$0! := 1.$$

Definición recursiva del factorial

8. Ahora podemos definir la función factorial de manera más formal, mediante una condición inicial y una fórmula recursiva:

$$0! = 1, \tag{2}$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

9. Factoriales de los números de 0 a 7. Usando la definición anterior calcule los factoriales de los números enteros de 0 a 7:

$0! = \underbrace{\qquad}_{?}$ $\qquad$ $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = \underbrace{\qquad}_{?}$

$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = \underbrace{\qquad}_{?}$ $\qquad$ $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}$

$4! =$ $\qquad$ $5! =$

$6! =$ $\qquad$ $7! =$

10. Practicamos la fórmula recursiva con números. Aplicar la fórmula (3) en los siguientes ejemplos, sin calcular la respuesta en la forma explícita:

$67! = 67 \cdot 66!$ $\qquad$ $38! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$

$2760! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ $\qquad$ $3176! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$

11. Practicamos la fórmula recursiva con variables.
Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Recuerde cómo se expresa $n!$ a través de $(n-1)!$:

$$n! = \underbrace{\qquad}_{?} (n-1)!. \tag{4}$$

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$. Aplicar la fórmula (4) con $n = a + 3$, esto es, expresamos $(a+3)!$ a través de $(a+2)!$:

$$(a+3)! = (a+3) \cdot \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Suponemos que $b \in \{5, 6, 7, \ldots\}$. Aplicar (4) al número $n = b - 4$:

$$(b-4)! = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Aplicar la fórmula recursiva dos veces o más

12. Ejemplo. Expresar 13! a través de 11!:

$$13! = 13 \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?} = 13 \cdot 12 \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?} = 156 \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

13. Ejercicio. Expresar 9! a través de 7!:

$$9! = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \underbrace{\qquad\quad}_{?} \cdot 7!.$$

14. Ejemplo. Expresar 20! a través de 17!:

$$20! = 20 \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?} = 20 \cdot 19 \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

15. Ejercicio. Expresar 57! a través de 53!:

$$57! =$$

16. Ejemplo. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$. Expresemos $(a+2)!$ a través de $a!$:

$$(a+2)! = (a+2) \cdot \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} = (a+2)(a+1) \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?} = (a^2+3a+2) \cdot \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

Simplificación de algunos cocientes con factoriales

17. Calcular las siguientes expresiones:

$$\frac{9!}{8!} = \frac{9 \cdot 8!}{8!} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad \frac{12!}{11!} =$$

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 7 \cdot 6 = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad \frac{9!}{6!} =$$

18. Expresar los siguientes cocientes a través de factoriales:

$$\frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!, \qquad\qquad \frac{8!}{8} =$$

$$\frac{15!}{15 \cdot 14} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{15 \cdot 14} = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad \frac{12!}{12 \cdot 11} =$$

Simplificación de algunos cocientes con factoriales (continuación)

19. Simplificar cocientes:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n!\ \cdot \qquad\qquad}{n!} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{\qquad\qquad \cdot n}{(n-1)!} = \underbrace{\qquad}_{?}$$

$$\frac{n!}{n} =$$

$$\frac{(n+2)!}{(n+2)\cdot(n+1)} =$$

Expresión de productos de números enteros consecutivos a través de factoriales

20. Ejemplo. Expresar el siguiente producto a través de factoriales:

$$4\cdot 5\cdot 6\cdot 7.$$

Solución. Notamos que los siguientes dos productos se escriben como ciertos factoriales:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = \underbrace{\qquad}_{?},$$

$$1\cdot 2\cdot 3 = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Dividimos la primera igualdad entre la segunda y cancelamos los factores comunes en el lado izquierdo:

$$4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = \frac{7!}{3!}.$$

Hemos logrado expresar el producto original a través de factoriales. □

Otra manera de escribir la misma solución.

$$4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{7!}{3!}.$$ □

21. Ejemplo. Expresar el siguiente producto a través de factoriales:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Solución. Primero expresamos a través de factoriales los siguientes productos:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?},$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Dividimos la primera igualdad entre la segunda:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \frac{\qquad}{\qquad}.$$

Razonando de otra manera, podemos completar el producto original hasta un factorial:

$$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\qquad} = \frac{10!}{6!}.$$ □

Escriba los siguientes productos en forma breve usando factoriales:

22. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 =$

23. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$

24. $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = \frac{\qquad}{\qquad}$

25. $6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 13 =$

26. $11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 18 =$