Existencia de ideales maximales en álgebras con identidad

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con identidad e.

1 Definición (ideal izquierdo)**.** Un conjunto $J \subseteq \mathcal{A}$ se llama *ideal izquierdo* de $\mathcal{A}$, si J es un subespacio de $\mathcal{A}$ y tiene la siguiente propiedad de absorción izquierda:

$$\forall a \in A \qquad \forall x \in J \qquad ax \in J.$$

2 Definición (ideal izquierdo propio)**.** Un ideal izquierdo J de $\mathcal{A}$ se llama *propio* si $J \neq \mathcal{A}$.

3 Proposición. *Sea J un ideal izquierdo en $\mathcal{A}$. Entonces, J es propio $\iff$ $e \notin J$.*

Demostración. Ejercicio. □

4 Proposición (ideal izquierdo principal generado por un elemento)**.** *Si $x \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}x$ es un ideal izquierdo.*

Demostración. Ejercicio. □

5 Ejemplo. Sea $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elegimos $x \in \mathbb{C}^n$ y pongamos

$$J \coloneqq \big\{A \in \mathcal{A} \colon\ Ax = 0\big\}.$$

Muestre que J es un ideal izquierdo en $\mathcal{A}$. Muestre que si $x \neq 0$, entonces $J \neq \mathcal{A}$.

6 Proposición (¿cuándo el ideal izquierdo principal es propio?)**.** *Sea $x \in \mathcal{A}$ y sea $J \coloneqq \mathcal{A}x$. Entonces, $J = \mathcal{A}$ $\iff$ x es invertible por la izquierda. Como consecuencia, J es propio $\iff$ x no es invertible por la izquierda.*

7 Definición (ideal izquierdo maximal)**.** Un ideal izquierdo propio J se llama maximal si para cada ideal izquierdo propio K tal que $J \subseteq K$, se tiene que $J = K$.

8 Proposición. *Suponemos el axioma de elección. Entonces, cada ideal izquierdo propio está contenido en un ideal izquierdo maximal.*

Demostración. Sea J un ideal izquierdo propio. Sea

$$P \coloneqq \big\{K\colon\ K \text{ es ideal izquierdo propio, } J \subseteq K\big\}.$$

$(P, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Mostremos que si Q es una cadena en P y $X \coloneqq \bigcup Q$, entonces $X \in P$.

Si $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces existe K en Q tal que $x \in K$, y luego $\lambda x \in K \subseteq X$.

Si $x, y \in X$, entonces existen $K, L \in Q$ tales que $x \in K$, $y \in L$. Como Q es una cadena, $K \subseteq L$ o $L \subseteq K$. Consideremos el caso $K \subseteq L$. En este caso, $x, y \in L$ y por eso $x + y \in L \subseteq X$.

Si $x \in X$, $a \in \mathcal{A}$, entonces existe K en Q tal que $x \in K$. Luego $ax \in K \subseteq X$.

Como $J \in Q$, tenemos que $J \subseteq X$.

Mostremos que $X \neq \mathcal{A}$. En efecto, $e \notin K$ para cada K en Q, luego $e \notin X$.

Por el lema de Zorn, P tiene un elemento maximal. □