Engrape aquí
No doble

Álgebra I, licenciatura. Examen parcial II. Variante α.

Números complejos en la forma binómica (algebraica) y en la forma polar (trigonométrica).

Apellidos y nombres:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 2	partici-pación	parcial 2

El examen dura 80 minutos. En los problemas teóricos hay que justificar todos los pasos.

Problema 1. *18 %.*
Demuestre la **propiedad asociativa de la multiplicación de números complejos**. En este problema escriba números complejos como pares ordenados de números reales.

Problema 2. *16 %.*
Demuestre la **propiedad subaditiva del valor absoluto de números complejos**: para cualesquier $z, w \in \mathbb{C}$,

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|.$$

Problema 3. *15 %.*
Resuelva la siguiente **ecuación cuadrática con coeficientes complejos.** Haga comprobaciones con las fórmulas de Vieta.

$$z^2 + (7 - 4\,\mathrm{i})z + (9 - 15\,\mathrm{i}) = 0.$$

Problema 4. *18 %.*
I. Enuncie y demuestre la fórmula de **multiplicación de números complejos en la forma polar**.

II. Enuncie la **fórmula de Moivre** y demuéstrela usando el resultado del inciso I y la inducción matemática.

Problema 5. *16 %.*
Identidades trigonométricas de Lagrange. Usando números complejos y la fórmula para la suma de la progresión geométrica deduzca fórmulas para las siguientes sumas:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta), \qquad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(k\theta).$$

Problema 6. *15 %.*
Raíces de un número complejo. Resuelva la ecuación $z^3 = -27$ usando la forma polar de números complejos. Exprese cada solución particular en forma polar y en forma binomial, además indíquela en el plano complejo. Haga comprobación para dos soluciones particulares.

Álgebra I, licenciatura. Examen parcial II. Variante β.

Números complejos en la forma binómica (algebraica) y en la forma polar (trigonométrica).

Apellidos y nombres:

Calificación (%):	examen escrito	tarea 2	partici-pación	parcial 2

El examen dura 80 minutos. En los problemas teóricos hay que justificar todos los pasos.

Problema 1. *18 %.*
Denotemos por E al **encaje natural** de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$:

$$\mathsf{E}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \mathsf{E}(x) \coloneqq (x, 0).$$

Demuestre que la función E es inyectiva, aditiva y multiplicativa. En este problema escriba números complejos como pares ordenados de números reales.

Problema 2. *16 %.*
Demuestre las siguientes propiedades de la **conjugación compleja**: para cada $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{\overline{z}} = z.$$

Problema 3. *15 %.*
Resuelva la siguiente **ecuación cuadrática con coeficientes complejos.** Haga comprobaciones con las fórmulas de Vieta.

$$z^2 + (1 + 8\,\mathrm{i})z + (-17 + \mathrm{i}) = 0.$$

Problema 4. *18 %.*
Criterio de igualdad de un número complejo a 1. ¿Cuándo un número complejo es igual a 1? Enuncie y demuestre el criterio. En el caso de usar algunos lemas, hay que enunciar y demostrarlos también.

Problema 5. *16 %.*
Sea $\alpha \in [0, \pi]$. **Escriba el número $1 - \cos(\alpha) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha)$ en forma trigonométrica.** En particular, encuentre su valor absoluto y su argumento principal. Tarea adicional: demuestre el mismo resultado con un razonamiento geométrico.

Problema 6. *15 %.*
Raíces de un número complejo. Resuelva la ecuación $z^8 = 1$ usando la forma polar de números complejos. Exprese cada solución particular en forma polar y en forma binomial, además indíquela en el plano complejo. Haga comprobación para alguna solución particular que tenga parte real no nula y parte imaginaria no nula.