

La convolución y el teorema de convolución sobre un grupo conmutativo finito, por medio de una forma bilineal no degenerada

Estos apuntes están basados en el libro Tao, Vu “Additive combinatorics”.

Objetivos. Introducir las definiciones básicas de análisis de Fourier sobre grupos conmutativos finitos usando el concepto de formas bilineales $G^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{T}$.

Prerrequisitos. El concepto de formas bilineales $G^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{T}$, la definición de la transformada de Fourier F_G .

Definición 1. Dadas f, g en $\mathbb{C}^G$, definimos su *convolución* $f * g$ mediante la siguiente regla:

$$f * g: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f * g)(x) := \mathbb{E}_{y \in G} f(x - y)g(y).$$

De manera más explícita, con $n = \#G$,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{n} \sum_{y \in G} f(x - y)g(y).$$

Ejercicio 2. Obviamente, la convolución $*$ es una operación binaria en $\mathbb{C}^G$. Demuestre que esta operación es asociativa y conmutativa.

Ejercicio 3. Dada una función $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, definimos su *soporte* como el conjunto de los puntos del dominio en los cuales f toma valores no nulos:

$$\text{supp}(f) := \{x \in G: f(x) \neq 0\}.$$

Ejercicio 4. Demuestre que si $f, g \in \mathbb{C}^G$, entonces

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

Ejercicio 5. Sean $A, B \subseteq G$. Demuestre que

$$\text{supp}(1_A * 1_B) = A + B.$$

Más aún, demuestre que para cada x en G ,

$$(1_A * 1_B)(x) = \mathbb{P}_G(A \cap (x - B)).$$

Lema 6. Para cada y en G , la siguiente función es una biyección:

$$\varphi_y: G \rightarrow G, \quad \varphi_y(x) := x - y.$$

La función inversa es φ_{-y} .

Demostración. Para cada x en G ,

$$(\varphi_y \varphi_{-y})(x) = \varphi_{-y}(x - y) = x - y + y = x.$$

De manera similar, $(\varphi_{-y} \varphi_y)(x) = x$. □

Teorema 7 (el teorema de convolución). Si $f, g \in \mathbb{C}^G$, entonces

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g},$$

es decir, para cada ξ en G ,

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

Demostración. Sea $\xi \in G$.

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} (f * g)(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{x \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} \sum_{y \in G} f(x - y) g(y) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{y \in G} g(y) \sum_{x \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} f(x - y). \end{aligned}$$

Notemos que para cada y en G , la función $\varphi_y(x) := x - y$ es una biyección. La usamos como un cambio de variable en la suma interior, tratando y como un parámetro:

$$z = x - y, \quad x = z + y.$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= \frac{1}{n^2} \sum_{y \in G} g(y) \sum_{z \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot (z + y))} f(z) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{y \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot y)} g(y) \left(\frac{1}{n} \sum_{z \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot z)} f(z) \right) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned} \quad \square$$