

La convolución y el teorema de convolución sobre un grupo conmutativo finito

Objetivos. Demostrar el teorema de convolución en el contexto de un grupos conmutativos finitos.

Prerrequisitos. El grupo dual, la transformada de Fourier $\mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^{\hat{G}}$.

Definición 1. Dadas f, g en $\mathbb{C}^G$, definimos su *convolución* $f * g$ mediante la siguiente regla:

$$f * g: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f * g)(x) := \mathbb{E}_{y \in G} f(x - y)g(y).$$

De manera más explícita, con $n = \#G$,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{n} \sum_{y \in G} f(x - y)g(y).$$

Ejercicio 2. Obviamente, la convolución $*$ es una operación binaria en $\mathbb{C}^G$. Demuestre que esta operación es asociativa y conmutativa.

Ejercicio 3. Dada una función $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, definimos su *soporte* como el conjunto de los puntos del dominio en los cuales f toma valores no nulos:

$$\text{supp}(f) := \{x \in G: f(x) \neq 0\}.$$

Ejercicio 4. Demuestre que si $f, g \in \mathbb{C}^G$, entonces

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

Ejercicio 5. Sean $A, B \subseteq G$. Demuestre que

$$\text{supp}(1_A * 1_B) = A + B.$$

Más aún, demuestre que para cada x en G ,

$$(1_A * 1_B)(x) = \mathbb{P}_G(A \cap (x - B)).$$

Lema 6. Para cada y en G , la siguiente función es una biyección:

$$\varphi_y: G \rightarrow G, \quad \varphi_y(x) := x - y.$$

La función inversa es φ_{-y} .

Demostración. Para cada x en G ,

$$(\varphi_y \varphi_{-y})(x) = \varphi_{-y}(x - y) = x - y + y = x.$$

De manera similar, $(\varphi_{-y} \varphi_y)(x) = x$. □

Teorema 7 (el teorema de convolución). Si $f, g \in \mathbb{C}^G$, entonces

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g},$$

es decir, para cada ξ en G ,

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Demostración. Sea $\xi \in \hat{G}$.

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\xi(x)} (f * g)(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{x \in G} \overline{\xi(x)} \sum_{y \in G} f(x - y) g(y) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{y \in G} g(y) \sum_{x \in G} \overline{\xi(x)} f(x - y). \end{aligned}$$

Notemos que para cada y en G , la función $\varphi_y(x) := x - y$ es una biyección. La usamos como un cambio de variable en la suma interior, tratando y como un parámetro:

$$z = x - y, \quad x = z + y.$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= \frac{1}{n^2} \sum_{y \in G} g(y) \sum_{z \in G} \overline{\xi((z + y))} f(z) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{y \in G} \overline{\xi(y)} g(y) \left(\frac{1}{n} \overline{\xi(z)} f(z) \right) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned} \quad \square$$