

Caracteres de grupos conmutativos finitos

Objetivos. Dado un grupo conmutativo finito G , introducir el concepto de caracteres $G \rightarrow \mathbb{T}$ y el grupo dual $\hat{G}$. En los temas futuros, vamos a estudiar $\hat{G}$ de manera más detallada.

Prerrequisitos. Grupo cíclico, homomorfismo de grupos, raíces de la unidad.

Estos apuntes están basados en el libro Lidl, Niederreiter, “Finite fields”, 2nd. ed., 1997. Usamos la notación aditiva para el grupo G . Denotamos por 0_G al elemento neutro de G .

Definición 1. Sea G un grupo conmutativo finito. Un *caracter* de G es un homomorfismo $G \rightarrow \mathbb{T}$. Denotamos por $\hat{G}$ el conjunto de los caracteres de G .

Definición 2. Dados f, g en $\hat{G}$, definimos $fg: G \rightarrow \mathbb{T}$ y $\bar{f}: G \rightarrow \mathbb{T}$,

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \quad \bar{f}(x) := \overline{f(x)}.$$

Proposición 3. $\hat{G}$ es un grupo conmutativo.

Demostración. 1. Si $f, g \in \hat{G}$, entonces $fg \in \hat{G}$:

$$\begin{aligned} (fg)(x+y) &= f(x+y)g(x+y) = f(x)f(y)g(x)g(y) \\ &= (f(x)g(x))(f(y)g(y)) = (fg)(x)(fg)(y). \end{aligned}$$

Esto significa que la multiplicación usual de caracteres (como funciones complejas) es una operación binaria en $\hat{G}$.

2. Las propiedades asociativas y conmutativa se siguen de la propiedades correspondientes de la multiplicación en $\mathbb{T}$.

3. El papel del elemento neutro en $\hat{G}$ hace la función constante 1. La denotamos por $1_{\hat{G}}$.

4. Dado f en $\hat{G}$, es fácil ver que $\bar{f} \in \hat{G}$ y $f\bar{f} = 1_{\hat{G}}$. $\square$

Ejemplo 4. Sea G un grupo cíclico de orden n y sea g un generador de G . Entonces, cada elemento de G se escribe de manera única en la forma

$$x = j \cdot g \quad (j \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

Pongamos

$$\varepsilon_n := \exp \frac{2\pi i}{n}.$$

Sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left(\varepsilon_n^k = 1 \iff k \in n\mathbb{Z} \right).$$

Dado r en $\{0, 1, \dots, n-1\}$, definimos $\varphi: G \rightarrow \mathbb{T}$,

$$\varphi_r(j \cdot g) := \varepsilon_n^{jr} \quad (j \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

Es fácil de ver que $\varphi_r \in \hat{G}$. Notemos que si $r \neq 0$, entonces $\varphi_r(g) \neq 1$. En las clases futuras, vamos a mostrar que cada caracter del grupo cíclico finito es de la forma φ_r .