# Teorema del binomio en problemas
# (plan de investigación)

**Objetivos.** Estudiar el teorema del binomio y conceptos combinatorios de manera independiente, como un pequeño proyecto de investigación (para estudiantes de secundaria o de bachillerato, o de primeros semestres de licenciatura), apoyándose solamente en una guía breve dada como una lista de problemas.

**Requisitos.** Alto nivel de preparación en matemáticas, mucho tiempo y mucho valor.

## Número de permutaciones

**1. Permutaciones.** Tenemos 6 *permutaciones* de tres números $1, 2, 3$:

$$(1,2,3), \quad (1,3,2), \quad (2,1,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2), \quad (3,2,1).$$

Escriba todas las permutaciones de dos números $1, 2$. Escriba todas las permutaciones de cuatro números $1, 2, 3, 4$.

**2. Número de permutaciones.** Denotemos por $P(n)$ al número de permutaciones de $n$ números. Encuentre una ley que relacione $P(2)$ con $P(3)$, $P(3)$ con $P(4)$. Exprese $P(n+1)$ a través de $P(n)$. Escriba $P(n)$ como cierto producto de números naturales (para $n \geq 1$).

**3. Convenio para $\boldsymbol{P(0)}$.** En el ejercicio anterior se establece una fórmula que expresa $P(n+1)$ a través de $P(n)$. Defina $P(0)$ de tal manera que esta fórmula sea correcta también para $n = 0$.

## Número de disposiciones

**4. Disposiciones.** Dados 5 números $1, 2, 3, 4$, podemos formar de ellos 12 listas de longitud 2, en las cuales los elementos son diferentes entre sí:

$$\begin{array}{cccccc} (1,2), & (1,3), & (1,4), & (2,1), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,4), & (4,1), & (4,2), & (4,3). \end{array}$$

Estas listas se llaman *disposiciones* (*arreglamientos*, *permutaciones parciales*) de 4 en 2. Escriba todas las disposiciones de 5 en 2. Escriba todas las disposiciones de 5 en 3. Escriba todas las disposiciones de 5 en 1.

**5. El número de disposiciones.** Denotemos por $A(n,k)$ el número de disposiciones de $n$ en $k$. Por ejemplo, $A(4,2) = 12$. Exprese $A(5,3)$ a través de $A(5,2)$. Exprese $A(5,2)$ a través de $A(5,1)$. Escriba $A(5,3)$ como un producto de números naturales. Escriba $A(n,k)$ como un producto de números naturales. Exprese $A(n,k)$ a través de la función $P$. Usando el convenio para $P(0)$ calcule $A(n,0)$.

## Número de subconjuntos

**6. Subconjuntos.** En el conjunto $1, 2, 3, 4, 5$ tenemos 10 subconjuntos de 3 elementos:

$$\{1,2,3\}, \quad \{1,2,4\}, \quad \{1,2,5\}, \quad \{1,3,4\}, \quad \{1,3,5\},$$
$$\{1,4,5\}, \quad \{2,3,4\}, \quad \{2,3,5\}, \quad \{2,4,5\}, \quad \{3,4,5\}.$$

En vez de *subconjuntos* algunos textos hablan de *combinaciones*. Nótese que un subconjunto $\{2, 4, 5\}$ corresponde a varias disposiciones de 3 en 5. ¿A cuántas?

**7. Número de subconjuntos.** Denotemos por $C(n, k)$ al número de $k$-subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por ejemplo, $C(5, 3) = 10$. ¿A cuántas disposiciones de $n$ en $k$ corresponde un $k$-subconjunto del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$? Exprese $C(n, k)$ a través de las funciones $A$ y $P$. Luego exprese $C(n, k)$ a través de $P$.

**8. Fórmulas para $\boldsymbol{C(n, 0)}$ y $\boldsymbol{C(n, n)}$.** Usando el convenio para $P(0)$ calcule $C(n, 0)$ y $C(n, n)$. Explique estas fórmulas en términos de subconjuntos.

**9. Tabla de los números $\boldsymbol{C(n, k)}$.** Escriba $C(n, k)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y para cada $k$ con $0 \le k \le n$:

$$C(0,0) = 1,$$
$$C(1,0) = 1, \quad C(1,1) = 1,$$
$$C(2,0) = 1, \quad C(2,1) = 2, \quad C(2,2) = 1,$$
$$C(3,0) = \quad, \quad C(3,1) = \quad, \quad C(3,2) = \quad, \quad C(3,3) = \quad,$$
$$C(4,0) = \quad, \quad C(4,1) = \quad, \quad C(4,2) = \quad, \quad C(4,3) = \quad, \quad C(4,4) = \quad.$$

Observando la tabla encuentre varias leyes intereantes.

**10. Fórmula recursiva para los números $\boldsymbol{C(n, k)}$.** Observando los elementos interiores de la tabla ejercicio anterior, es decir, los elementos $C(n, k)$ con $0 < k < n$, encuentre una ley que relacione cada elemento con algunos elementos del renglón anterior.

**11. Demostración combinatoria de la fórmula recursiva para $\boldsymbol{C(5, 3)}$.** Escriba todos los 3-subconjuntos del conjunto $1, 2, 3, 4, 5$. Divídalos en dos partes: los que contienen al elemento 5 y los que no lo contienen. Exprese $C(5, 3)$ a través de $C(4, 2)$ y $C(4, 3)$.

**12. Demostración combinatoria de la fórmula recursiva para $\boldsymbol{C(n, k)}$.** Demuestre la fórmula recursiva para $C(n, k)$ razonando en términos de subconjuntos. Escriba la misma fórmula para $C(n + 1, k + 1)$.

## Potencias del binomio

**13.** Calcule $(a+b)^n$ para $n=2$, luego para $n=3$, luego para $n=4$, luego para $n=5$. ¿Qué forma tienen los sumandos en estos desarrollos? En otras palabras, si $Ca^pb^q$ es un sumando del desarrollo de $(a+b)^n$, ¿qué se puede decir sobre $p$ y $q$? Después de contestar esta pregunta lo único que falta es calcular el coeficiente $C$.

**14.** En el desarrollo de $(a+b)^4$ los sumandos de la forma $a^2b^2$ se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
\text{elegimos } a \text{ en los factores } 1,2: & (\boldsymbol{a}+b)(\boldsymbol{a}+b)(a+\boldsymbol{b})(a+\boldsymbol{b}) \\
\text{elegimos } a \text{ en los factores } 1,3: & (\boldsymbol{a}+b)(a+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+b)(a+\boldsymbol{b}) \\
\text{elegimos } a \text{ en los factores } 1,4: & (\boldsymbol{a}+b)(a+\boldsymbol{b})(a+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+b) \\
\text{elegimos } a \text{ en los factores } 2,3: & (a+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+b)(\boldsymbol{a}+b)(a+\boldsymbol{b}) \\
\text{elegimos } a \text{ en los factores } 2,4: & (a+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+b)(a+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+b) \\
\text{elegimos } a \text{ en los factores } 3,4: & (a+\boldsymbol{b})(a+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+b)(\boldsymbol{a}+b)
\end{array}$$

Se trata de encontrar 2-subconjuntos del conjunto $1,2,3,4$. Calcule $C(4,2)$.

**15.** Repita el ejercicio anterior para $a^3b$ en el desarrollo de $(a+b)^4$, luego para $a^2b^3$ en el desarrollo de $(a+b)^5$.

**16.** Escriba la fórmula para $(a+b)^n$.

**17.** Demuestre la fórmula anterior por inducción utilizando la fórmula recursiva para los coeficientes $C$ y las fórmulas para $C(n,0)$ y $C(n,n)$.