

Polinomios básicos de Lagrange y la partición de la identidad asociada (un tema de álgebra)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

7 de septiembre de 2026

Objetivos de la plática

- Recordar la definición de los polinomios básicos de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ asociados a una lista de números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ diferentes a pares.
- Mostrar que los polinomios básicos de Lagrange forman una partición de la identidad:

$$\sum_{k=1}^m L_k(x) = 1.$$

- Estudiar otras propiedades de los polinomios L_k y de la función

$$f(x) := \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j).$$

División de un polinomio entre un binomio mónico (repaso)

Si P es un polinomio de una variable y α es un número, entonces existen un polinomio Q y un número r tales que

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r.$$

Por ejemplo,

$$3x^3 - 8x^2 + 8x - 3 = (3x^2 - 2x + 4)(x - 2) + 5.$$

El teorema del residuo (pequeño teorema de Bézout)

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r.$$

Teorema

$$P(\alpha) = r.$$

Corolario

Si $P(\alpha) = 0$, entonces P se divide entre $x - \alpha$.

El teorema de unicidad para los polinomios, repaso

Teorema

Si f es un polinomio de grado $\leq n - 1$ y f se anula en n puntos diferentes, entonces f es el polinomio cero.

El teorema de unicidad para los polinomios, repaso

Teorema

Si f es un polinomio de grado $\leq n - 1$ y f se anula en n puntos diferentes, entonces f es el polinomio cero.

Idea de demostración:

Dividir el polinomio entre $x - \alpha_1$, luego entre $x - \alpha_2$, etc.

El teorema de unicidad para los polinomios, repaso

Teorema

Si f es un polinomio de grado $\leq n - 1$ y f se anula en n puntos diferentes, entonces f es el polinomio cero.

Idea de demostración:

Dividir el polinomio entre $x - \alpha_1$, luego entre $x - \alpha_2$, etc.

Teorema

Si f, g son polinomios de grado $\leq n - 1$ que toman los mismos valores en n puntos diferentes, entonces $f = g$.

El polinomio que se anula en dos puntos dados

Ejercicio.

Sean α_1, α_2 dos números, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0.$$

Respuesta:

$$P(x)$$

El polinomio que se anula en dos puntos dados

Ejercicio.

Sean α_1, α_2 dos números, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0.$$

Respuesta:

$$P(x) =$$

El polinomio que se anula en dos puntos dados

Ejercicio.

Sean α_1, α_2 dos números, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0.$$

Respuesta:

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0, \quad P(\alpha_3) = 1.$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0, \quad P(\alpha_3) = 1.$$

Respuesta:

$$P(x)$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0, \quad P(\alpha_3) = 1.$$

Respuesta:

$$P(x) =$$

El polinomio que toma los valores 0, 0, 1 en tres puntos dados

Ejercicio. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres puntos diferentes a pares.

Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P(\alpha_2) = 0, \quad P(\alpha_3) = 1.$$

Respuesta:

$$P(x) = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)},$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1, \qquad L_1(\alpha_2)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1, \quad L_1(\alpha_2) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1, \qquad L_1(\alpha_2) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1,$$

$$L_1(\alpha_2) = 0,$$

$$L_1(\alpha_3)$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1,$$

$$L_2(\alpha_2) = 0,$$

$$L_3(\alpha_3) =$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1,$$

$$L_1(\alpha_2) = 0,$$

$$L_1(\alpha_3) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1,$$

$$L_1(\alpha_2) = 0,$$

$$L_1(\alpha_3) = 0,$$

$$L_2(\alpha_1) = 0,$$

$$L_2(\alpha_2) = 1,$$

$$L_2(\alpha_3) = 0,$$

Polinomios básicos de Lagrange, $n = 3$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres números, diferentes a pares. Consideremos los siguientes tres polinomios.

$$L_1(x) := \frac{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}, \quad L_2(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_3(x) := \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Calculemos los valores de estos polinomios en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$L_1(\alpha_1) = 1,$$

$$L_1(\alpha_2) = 0,$$

$$L_1(\alpha_3) = 0,$$

$$L_2(\alpha_1) = 0,$$

$$L_2(\alpha_2) = 1,$$

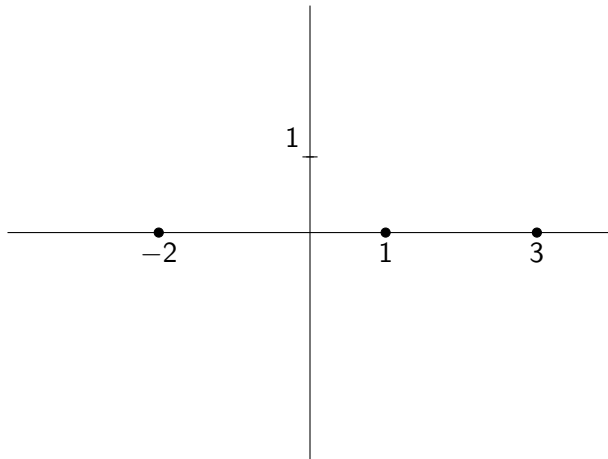
$$L_2(\alpha_3) = 0,$$

$$L_3(\alpha_1) = 0,$$

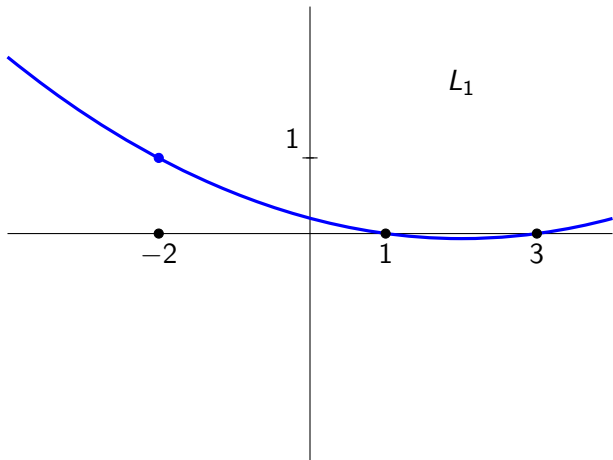
$$L_3(\alpha_2) = 0,$$

$$L_3(\alpha_3) = 1.$$

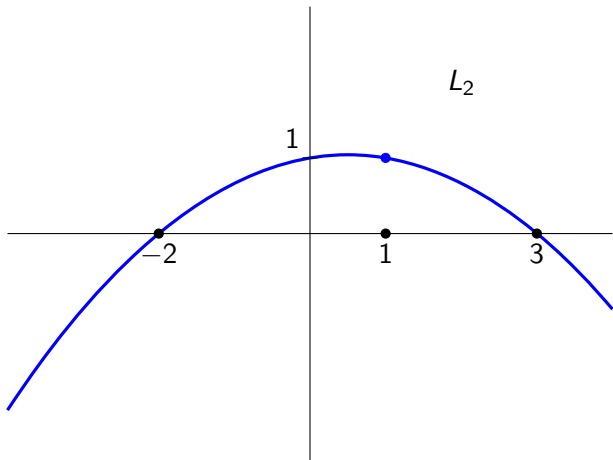
Ejemplo, $n = 3$



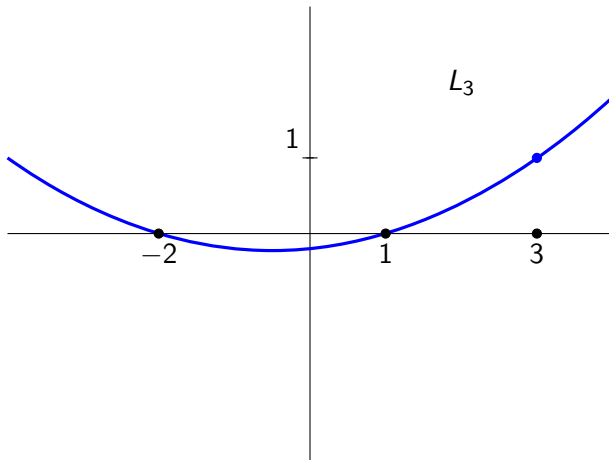
Ejemplo, $n = 3$



Ejemplo, $n = 3$



Ejemplo, $n = 3$



Polinomios básicos de Lagrange

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ algunos puntos diferentes a pares y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$L_j(t) := \frac{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x - \alpha_k)}{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (\alpha_j - \alpha_k)}.$$

Entonces, para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(\alpha_q)$$

Polinomios básicos de Lagrange

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ algunos puntos diferentes a pares y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$L_j(t) := \frac{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x - \alpha_k)}{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (\alpha_j - \alpha_k)}.$$

Entonces, para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(\alpha_q) =$$

Polinomios básicos de Lagrange

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ algunos puntos diferentes a pares y sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$L_j(t) := \frac{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x - \alpha_k)}{\prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (\alpha_j - \alpha_k)}.$$

Entonces, para cada q en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(\alpha_q) = \delta_{j,q}.$$

¿Qué sale al sumar todos los polinomios básicos de Lagrange?

$$L_1(x) + L_2(x) + \cdots + L_n(x) = ?$$

Los polinomios básicos de Lagrange forman una “partición de la identidad”

Teorema

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ algunos números diferentes a pares
y sean $L_1, \dots, L_n$ los polinomios básicos de Lagrange asociados a estos números.
Entonces,

$$\sum_{j=1}^n L_j(x) = 1.$$

Demostración

Sea

$$s(x) := \sum_{j=1}^n L_j(x).$$

Demostración

Sea

$$s(x) := \sum_{j=1}^n L_j(x).$$

Para cada q en $\{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$s(\alpha_q) = \sum_{j=1}^n \delta_{j,q} = 1.$$

Demostración

Sea

$$s(x) := \sum_{j=1}^n L_j(x).$$

Para cada q en $\{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$s(\alpha_q) = \sum_{j=1}^n \delta_{j,q} = 1.$$

El polinomio s es grado $\leq n - 1$ y tomar el valor 1 en n puntos diferentes.

Demostración

Sea

$$s(x) := \sum_{j=1}^n L_j(x).$$

Para cada q en $\{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$s(\alpha_q) = \sum_{j=1}^n \delta_{j,q} = 1.$$

El polinomio s es grado $\leq n - 1$ y tomar el valor 1 en n puntos diferentes.

Por lo tanto, s es el polinomio uno.

En el resto de esta presentación, siempre suponemos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son algunos números diferentes a pares y $L_1, \dots, L_n$ son los polinomios básicos de Lagrange correspondientes.

Además, consideremos el siguiente polinomio de grado n :

$$f(x) := \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j).$$

L_r divide f

Denotemos por c_r al coeficiente principal del polinomio L_r :

$$c_r := \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} \frac{1}{\alpha_r - \alpha_j}.$$

Proposición

Para cada r en $\{1, \dots, n\}$,

$$(x - \alpha_r)L_r(x) = c_r f(x).$$

Demostración

$$c_r f(x) = c_r \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j) = (x - \alpha_r) \left(c_r \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} (x - \alpha_j) \right) = (x - \alpha_r) L_r(x).$$

f divide $L_r L_s$, si $r \neq s$

Proposición

Para cada r, s en $\{1, \dots, n\}$ tales que $r \neq s$, existe un polinomio g tal que

$$f g = L_r L_s.$$

Demostración

$$\begin{aligned}h_r(x)h_s(x) &= c_rc_s \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r\}} (x - \alpha_k) \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}} (x - \alpha_k) \\&= c_rc_s(x - \alpha_s)(x - \alpha_r) \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r, s\}} (x - \alpha_k)^2 = f(x)g(x),\end{aligned}$$

donde

$$g(x) := c_rc_s \prod_{k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r, s\}} (x - \alpha_k).$$

$x - \alpha_r$ divide $1 - L_r$

Proposición

Para cada r en $\{1, \dots, n\}$, existe un polinomio h_r tal que

$$1 - L_r(x) = (x - \alpha_r)h_r(x).$$

Demostración

Para cada j en $\{1, \dots, n\}$,

$$L_j(x) = c_j \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (x - \alpha_k).$$

Esto significa que si $r \neq j$, entonces

$$(x - \alpha_r) \mid L_j.$$

Como

$$1 - L_r = \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} L_j,$$

concluimos que

$$(x - \alpha_r) \mid L_r.$$