

La transformada de Fourier sobre un grupo conmutativo finito

Objetivos. Introducir la transformada de Fourier sobre un grupo conmutativo finito general; demostrar su invertibilidad y la propiedad isométrica (salvo la normalización).

Prerrequisitos. El grupo dual de un grupo conmutativo finito, propiedades ortogonales de caracteres.

Estos apuntes están basados en el libro Lidl, Niederreiter, “Finite fields”, 2nd. ed., 1997.

En lo que sigue, suponemos que G es un grupo conmutativo finito. Denotamos su orden por n :

$$n := \#G.$$

Usamos la notación aditiva para el grupo G . Denotamos por 0_G el elemento neutro de G .

Definición 1. Dada una función $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, su *transformada de Fourier* se define mediante la siguiente regla: $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\xi(x)} f(x).$$

Definimos $F: \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^{\hat{G}}$, $Ff := \hat{f}$.

Observación 2. En algunas situaciones, es más cómodo no poner el coeficiente n en la definición de la transformada de Fourier, pero en este caso sería necesario ponerlo en la fórmula de inversión.

Teorema 3 (la fórmula de inversión para la transformada de Fourier). Si $f \in \mathbb{C}^G$, entonces para cada x en G ,

$$f(x) = \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi) \xi(x).$$

En otras palabras,

$$f = \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi) \xi.$$

La función f se representa como una combinación de los caracteres, y los valores de $\hat{f}$ sirven como los coeficientes de esta combinación lineal.

Demostración. Sean $f \in \mathbb{C}^G$, $x \in G$. Empezamos con el lado derecho de la fórmula, sustituimos la definición de $\widehat{f}(\xi)$ cambiamos el orden de las sumas y usamos la relación de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\xi) \xi(x) &= \sum_{\xi \in \widehat{G}} \left(\frac{1}{n} \sum_{y \in G} \overline{\xi(y)} f(y) \right) \xi(x) \\ &= \sum_{y \in G} \left(\frac{1}{n} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \overline{\xi(y)} \xi(x) \right) f(y) = \sum_{y \in G} \delta_{x,y} f(y) = f(x). \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 4 (identidad de Parseval). *Si $f, g \in \mathbb{C}^G$, entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} = \sum_{\xi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}.$$

Demostración. Empezamos con el lado izquierdo, expresamos g en términos de $\widehat{g}$ por el Teorema 3, cambiamos el orden de las sumas y aplicamos la definición de la transformada de Fourier de f :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\left(\sum_{\xi \in \widehat{G}} \widehat{g}(\xi) \xi(x) \right)} \\ &= \sum_{\xi \in \widehat{G}} \left(\frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\xi(x)} f(x) \right) \overline{\widehat{g}(\xi)} = \sum_{\xi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 5 (identidad de Plancherel). *Si $f \in \mathbb{C}^G$, entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \sum_{\xi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Demostración. Se sigue del Teorema 4, al poner $g = f$. $\square$