

La transformada de Fourier sobre un grupo conmutativo finito, por medio de una forma bilineal no degenerada

Estos apuntes están basados en el libro Tao, Vu “Additive combinatorics”. Los apuntes están redactados por Egor Maximenko y Jusset Zaid Soto Islas.

Objetivos. Introducir las definiciones básicas de análisis de Fourier sobre grupos conmutativos finitos usando el concepto de formas bilineales $G^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{T}$.

Prerrequisitos. El concepto de formas bilineales $G^2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{T}$, existencia de formas bilineales no triviales, ortogonalidad de caracteres asociados a los elementos de G .

Repaso

En estos apuntes suponemos que G es un grupo conmutativo finito, de orden n . Usamos la notación aditiva para G . Denotamos por 0_G al elemento neutro de G .

Fijamos en G alguna forma bilineal no degenerada. Escribimos $\xi \cdot g$ para el valor de esta forma en el par (ξ, g) .

Repaso 1 (la función exponencial $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$). Definimos $\mathcal{E}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ mediante la regla

$$\mathcal{E}(x + \mathbb{Z}) := \exp(2\pi i x).$$

Ya hemos visto que la definición es consistente y $\mathcal{E}$ es un isomorfismo de grupos.

Repaso 2. Definimos el producto interno en el espacio vectorial $\mathbb{C}^G$ mediante la siguiente regla:

$$\langle f, g \rangle := \mathbb{E}(f \bar{g}) \quad (f, g \in \mathbb{C}^G),$$

esto es,

$$\langle f, g \rangle = \mathcal{E}_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} \quad (f, g \in \mathbb{C}^G).$$

Repaso 3 (el caracter asociado a un elemento de G , respecto a una forma bilineal no degenerada). Dado ξ en G , definimos $\mathcal{E}_\xi: G \rightarrow \mathbb{T}$,

$$\mathcal{E}_\xi(x) := \mathcal{E}(\xi \cdot x).$$

Es fácil de ver que $\mathcal{E}_\xi$ es un homomorfismo de grupos.

Repaso 4 (propiedades ortogonales). Si $\xi, \eta \in G$, entonces

$$\mathbb{E}_{x \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \overline{\mathcal{E}(\eta \cdot x)} = \delta_{\xi, \eta}. \quad (1)$$

Si $x, y \in G$, entonces

$$\mathbb{E}_{\xi \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot y)} = \delta_{x, y}. \quad (2)$$

Proposición 5. La familia $(\mathcal{E}_\xi)_{\xi \in G}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^G$.

Definición 6. Decimos que $(\mathcal{E}_\xi)_{\xi \in G}$ es la *base finita de Fourier* sobre el grupo G .

La transformada de Fourier asociada al grupo G , respecto a una forma bilineal no degenerada

Definición 7. Definimos $F_G: \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^G$,

$$(F_G f)(\xi) := \langle f, \mathcal{E}_\xi \rangle.$$

También escribimos $\hat{f}$ en vez de $F_G f$. Notamos que

$$\hat{f}(\xi) = \mathbb{E}(f \overline{\mathcal{E}_\xi}) = \mathbb{E}_{x \in G} \left(f(x) \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} \right).$$

Proposición 8 (la fórmula de inversión). Si $f \in \mathbb{C}^G$ y $x \in G$, entonces

$$f(x) = \sum_{\xi \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \hat{f}(\xi).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{n} \sum_{\xi \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \sum_{y \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot y)} f(y) \\ &= \sum_{y \in G} \left(\frac{1}{n} \sum_{\xi \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot y)} \right) f(y) = \sum_{y \in G} \delta_{y,x} f(y) = f(x). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 9 (la identidad de Plancherel). Si $f, g \in \mathbb{C}^G$, entonces

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{C}^G} = \sum_{\xi \in G} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}.$$

Demostración. Empezamos con la expresión en el lado izquierdo, usamos la fórmula de inversión para expresar g en términos de $\hat{g}$, cambiamos el orden de las sumas y aplicamos la definición de $\hat{f}$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathbb{C}^G} &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\left(\sum_{\xi \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot x) \hat{g}(\xi) \right)} \\ &= \sum_{\xi \in G} \left(\frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} f(x) \right) \hat{g}(\xi) = \sum_{\xi \in G} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}. \quad \square \end{aligned}$$

Idea de segunda demostración. Empezamos con la expresión en el lado derecho y sustituimos la definición de la transformada de Fourier:

$$\sum_{\xi \in G} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} = \sum_{\xi \in G} \left(\frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} f(x) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{y \in G} \mathcal{E}(\xi \cdot y) \overline{g(y)} \right).$$

Ejercicio: completar la demostración, usando la propiedad de ortogonalidad (2). $\square$

Proposición 10 (la identidad de Parseval). Si $f \in \mathbb{C}^G$, entonces

$$\mathbb{E}_G(|f|^2) = \sum_{\xi \in G} |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Demostración. Es un corolario de la proposición anterior. $\square$

Ejemplo 11. Sea $\eta \in G$. Calculemos la transformada de Fourier de la función $\mathcal{E}_\eta$.

$$\hat{\mathcal{E}}_\eta(\xi) = \mathbb{E}_G(\mathcal{E}_\eta \overline{\mathcal{E}_\xi}) = \langle \mathcal{E}_\eta, \mathcal{E}_\xi \rangle_{\mathbb{C}^G} = \delta_{\xi, \eta}.$$

Ejemplo 12. Para $\eta = 0$, el caracter $\mathcal{E}_\eta$ es simplemente la función constante 1:

$$\mathcal{E}_\eta(x) = 1.$$

Por lo tanto, para cualquier f en $\mathbb{C}^G$, el 0-ésimo coeficiente de Fourier es simplemente el valor medio (“el valor esperado”) de f :

$$\hat{f}(0) = \langle f, 1 \rangle_{\mathbb{C}^G} = \mathbb{E}_G(f).$$

Definición 13 (el complemento ortogonal de un subconjunto de G). Dado $S \subseteq G$, se define

$$S^\perp := \{\xi \in G : \forall s \in S \quad \xi \cdot s = 0\}.$$

Ejercicio 14. Demuestre que si $S \subseteq G$, entonces $S^\perp$ es un subgrupo de G .

Proposición 15 (la transformada de Fourier de la función característica de un subgrupo de G). Si H es un subgrupo de G , entonces

$$\widehat{1_H} = \mathbb{P}_G(H) 1_{H^\perp}.$$

Demostración. Por brevedad, denotamos 1_H por f :

$$f(x) := 1_H(x) = \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \notin H. \end{cases}$$

1. Si $\xi \in H^\perp$, entonces

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \overline{\mathcal{E}_\xi(x)} 1_H(x) = \frac{1}{n} \sum_{x \in H} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} = \frac{1}{n} \sum_{x \in H} 1 = \frac{\#H}{n} = \mathbb{P}_G(H).$$

2. Sea $\xi \notin H^\perp$. Encontramos a en H tal que $\xi \cdot a \neq 0_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. Notamos que la función $\varphi: H \rightarrow H$, $\varphi(x) := x - a$, es una biyección. Usamos esta biyección como un cambio de variable:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{x \in H} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot x)} \stackrel{y=x-a}{x=y+a} \frac{1}{n} \sum_{y \in H} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot (y+a))} = \frac{1}{n} \sum_{y \in H} \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot a) \mathcal{E}(\xi \cdot y)} = \overline{\mathcal{E}(\xi \cdot a)} \hat{f}(\xi),$$

de donde sale que $(\overline{\mathcal{E}(\xi \cdot a)} - 1) \hat{f}(\xi) = 0$ y $\hat{f}(\xi) = 0$.

3. Juntando los dos casos, concluimos que

$$\widehat{1_H} = \mathbb{P}_G(H) 1_{H^\perp}. \quad \square$$

Proposición 16 (la cardinalidad del complemento ortogonal de un subgrupo). *Si H es un subgrupo de G , entonces*

$$\#H \cdot \#(H^\perp) = n.$$

Demostración. Sea $f := 1_H$. Aplicamos la Proposición 15 y la identidad de Parseval (Proposición 10). Por un lado,

$$\mathbb{E}_G(|f|^2) = \mathbb{E}_G(1_H) = \frac{\#H}{n} = \mathbb{P}_G(H).$$

Por otro lado,

$$\sum_{\xi \in G} |\mathbb{P}_G(H) 1_{H^\perp}(\xi)|^2 = \mathbb{P}_G(H)^2 \sum_{\xi \in G} 1_{H^\perp}(\xi) = \mathbb{P}_G(H)^2 \#(H^\perp).$$

Igualamos las expresiones obtenidas:

$$\mathbb{P}_G(H) = \mathbb{P}_G(H)^2 \#(H^\perp).$$

Como $0_G \in H$, tenemos que $\#H > 0$ y $\mathbb{P}_G(H) > 0$, así que podemos dividir entre $\mathbb{P}_G(H)$:

$$\frac{\#H}{n} \#(H^\perp) = 1. \quad \square$$