Núcleos reproductores y marcos de Parseval (un tema del curso “Espacios de Hilbert con núcleo reproductor”)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

5 de enero de 2023

Esta presentación está basada en un fragmento del libro:

Paulsen, Raghupathi:

An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces.

Plan

Contenido

Objetivos

Estudiaremos la situación cuando $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Objetivos

Estudiaremos la situación cuando $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos el núcleo reproductor por K.

Objetivos

Estudiaremos la situación cuando $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos el núcleo reproductor por K.

Suponemos que $(f_s)_{s \in S}$ es una familia de elementos de H.

Objetivos

Estudiaremos la situación cuando $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos el núcleo reproductor por K.

Suponemos que $(f_s)_{s\in S}$ es una familia de elementos de H.

- Mostrar que si $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval, entonces

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)} \qquad (x, y \in X).$$

- Mostrar que si se cumple la identidad arriba, entonces $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Objetivos

Estudiaremos la situación cuando $H \leq \mathbb{C}^X$ es un EHNR.

Denotamos el núcleo reproductor por K.

Suponemos que $(f_s)_{s\in S}$ es una familia de elementos de H.

- Mostrar que si $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval, entonces

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)} \qquad (x, y \in X).$$

- Mostrar que si se cumple la identidad arriba, entonces $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Estos dos resultados se conocen como el teorema de Papadakis.

Prerrequisitos

- Espacios de Hilbert con núcleo reproductor.
- Marcos de Parseval.

Repaso: definición de marco de Parseval

Definición

Sean H un espacio de Hilbert, S un conjunto, $(f_s)_{s\in S} \in H^S$ una familia de vectores en H.
Se dice que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval para H, si para cada h en H

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2.$$

Repaso: criterio de marco de Parseval

Proposición

Sean H un espacio de Hilbert, J un conjunto, $(f_s)_{s\in S} \in H^S$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(f_s)_{s\in J}$ es un marco de Parseval;

(b) existe una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$ tal que

$$(Vh)_s = \langle h, f_s\rangle \qquad (h \in H,\ s \in S);$$

(c) para cada h en H, se tiene que

$$h = \sum_{s\in S} \langle h, f_s\rangle\, f_s.$$

Plan

Teorema de Papadakis

Teorema

Sean X un conjunto, H un EHNR sobre X, $(f_s)_{s\in S}$ una familia en H.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Entonces son equivalentes:

(a) $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval para H;

(b) para cada x, y en X,

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}.$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle\, f_s =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x, y)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle \, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)} \, f_s.$$

Luego

$$K(x, y) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x, y) = K_y(x)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle \, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)} \, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x, y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle \, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)} \, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x \rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)} \, f_s, \, K_x \right\rangle.$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s,\ K_x \right\rangle.$$

Finalmente, usamos la continuidad del producto interno:

$$K(x,y)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s \rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x \rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s,\; K_x \right\rangle.$$

Finalmente, usamos la continuidad del producto interno:

$$K(x,y) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s,\ K_x \right\rangle.$$

Finalmente, usamos la continuidad del producto interno:

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, \langle f_s, K_x\rangle$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s,\ K_x \right\rangle.$$

Finalmente, usamos la continuidad del producto interno:

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, \langle f_s, K_x\rangle =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle\, f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle = \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s,\ K_x \right\rangle.$$

Finalmente, usamos la continuidad del producto interno:

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, \langle f_s, K_x\rangle = \sum_{s\in S} f_s(x)\, \overline{f_s(y)}.$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que para cada x, y en X,

$$K(x, y) = \sum_{s \in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}.$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que para cada x, y en X,

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}.$$

Pongamos

$$H_0 := \operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\}).$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que para cada x, y en X,

$$K(x,y) = \sum_{s \in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}.$$

Pongamos

$$H_0 := \operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\}).$$

Sea $h \in H_0$:

$$h = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j}.$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que para cada x, y en X,

$$K(x, y) = \sum_{s \in S} f_s(x) \overline{f_s(y)}.$$

Pongamos

$$H_0 := \operatorname{lin}(\{K_y : \ y \in X\}).$$

Sea $h \in H_0$:

$$h = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j}.$$

Vamos a demostrar que

$$\|h\|^2 = \sum_{s \in S} |\langle h, f_s \rangle|^2.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} f_s(y_q) \overline{f_s(y_p)}$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} f_s(y_q) \overline{f_s(y_p)} =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} f_s(y_q) \overline{f_s(y_p)} = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} f_s(y_q) \overline{f_s(y_p)} = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Metemos las sumas finitas dentro de la suma sobre S:

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s\in S} f_s(y_q)\overline{f_s(y_p)} = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s\in S} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Metemos las sumas finitas dentro de la suma sobre S:

$$\|h\|^2$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} f_s(y_q) \overline{f_s(y_p)} = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Metemos las sumas finitas dentro de la suma sobre S:

$$\|h\|^2 =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Primero, expresamos $\|h\|^2$ en términos de K:

$$\|h\|^2 = \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p).$$

Descomponemos K en términos de f_s y aplicamos la propiedad reproductora:

$$\|h\|^2 = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} f_s(y_q) \overline{f_s(y_p)} = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s \in S} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Metemos las sumas finitas dentro de la suma sobre S:

$$\|h\|^2 = \sum_{s \in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s \in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2 =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \left\langle f_s, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, f_s \right\rangle$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \left\langle f_s, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, f_s \right\rangle =$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \left\langle f_s, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, f_s \right\rangle = \sum_{s\in S} \langle f_s, h \rangle \langle h, f_s \rangle$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q} \rangle \langle K_{y_p}, f_s \rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \left\langle f_s, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, f_s \right\rangle = \sum_{s\in S} \langle f_s, h \rangle \langle h, f_s \rangle =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle f_s, K_{y_q}\rangle \langle K_{y_p}, f_s\rangle.$$

Aplicamos la propiedad sesquilineal del producto interno:

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} \left\langle f_s, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, f_s \right\rangle = \sum_{s\in S} \langle f_s, h\rangle \, \langle h, f_s\rangle = \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2.$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s \in S} |\langle h, f_s \rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Definimos $\widetilde{V}\colon H_0 \to \ell^2(S)$.

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s \in S} |\langle h, f_s \rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Definimos $\widetilde{V}\colon H_0 \to \ell^2(S)$. Para cada h en H_0, pongamos

$$(\widetilde{V}h)(s) := \langle h, f_s \rangle \qquad (s \in S).$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Definimos $\widetilde{V} \colon H_0 \to \ell^2(S)$. Para cada h en H_0, pongamos

$$(\widetilde{V}h)(s) := \langle h, f_s\rangle \qquad (s \in S).$$

Debido al cálculo anterior, $\widetilde{V}h \in \ell^2(S)$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Definimos $\widetilde{V}\colon H_0 \to \ell^2(S)$. Para cada h en H_0, pongamos

$$(\widetilde{V}h)(s) := \langle h, f_s\rangle \qquad (s \in S).$$

Debido al cálculo anterior, $\widetilde{V}h \in \ell^2(S)$.

Obviamente, $\widetilde{V}$ es lineal.

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s \in S} |\langle h, f_s \rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Definimos $\widetilde{V}\colon H_0 \to \ell^2(S)$. Para cada h en H_0, pongamos

$$(\widetilde{V} h)(s) := \langle h, f_s \rangle \qquad (s \in S).$$

Debido al cálculo anterior, $\widetilde{V} h \in \ell^2(S)$.

Obviamente, $\widetilde{V}$ es lineal.

Debido al cálculo anterior, $\widetilde{V}$ es una isometría.

Demostración, (b)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que

$$\forall h \in H_0 \qquad \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2 = \|h\|^2.$$

Definimos $\widetilde{V}\colon H_0 \to \ell^2(S)$. Para cada h en H_0, pongamos

$$(\widetilde{V}h)(s) := \langle h, f_s\rangle \qquad (s \in S).$$

Debido al cálculo anterior, $\widetilde{V}h \in \ell^2(S)$.

Obviamente, $\widetilde{V}$ es lineal.

Debido al cálculo anterior, $\widetilde{V}$ es una isometría.

Como H_0 es denso en H, $\widetilde{V}$ se extiende a una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), final

Está definida una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$.

Demostración, (b)⇒(a), final

Está definida una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$.

Para cada s en S y cada h en H_0, por la definición de V y $\widetilde{V}$,

$$(Vh)(s) = \langle h, f_s \rangle. \tag{1}$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Está definida una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$.

Para cada s en S y cada h en H_0, por la definición de V y $\widetilde{V}$,

$$(Vh)(s) = \langle h, f_s \rangle. \tag{1}$$

Para cada s en S fijo, las siguientes dos funciones son continuas:

$$h \mapsto (Vh)(s), \qquad h \mapsto \langle h, f_s \rangle.$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Está definida una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$.

Para cada s en S y cada h en H_0, por la definición de V y $\widetilde{V}$,

$$(Vh)(s) = \langle h, f_s \rangle. \tag{1}$$

Para cada s en S fijo, las siguientes dos funciones son continuas:

$$h \mapsto (Vh)(s), \qquad h \mapsto \langle h, f_s \rangle.$$

Por lo tanto, (1) se cumple para cada h en H.

Demostración, (b)⇒(a), final

Está definida una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(S)$.

Para cada s en S y cada h en H_0, por la definición de V y $\widetilde{V}$,

$$(Vh)(s) = \langle h, f_s \rangle. \tag{1}$$

Para cada s en S fijo, las siguientes dos funciones son continuas:

$$h \mapsto (Vh)(s), \qquad h \mapsto \langle h, f_s \rangle.$$

Por lo tanto, (1) se cumple para cada h en H.

Por el criterio de marco de Parseval, $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval.