# Núcleos reproductores y marcos de Parseval

Estos apuntes son muy cercanos a un fragmento del libro de Paulsen y Raghupathi.

**1 Teorema** (Papadakis)**.** *Sean $X$ un conjunto, $H$ un EHNR sobre $X$, $K$ el núcleo reproductor de $X$, $(f_s)_{s\in S}$ una familia en $H$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

*(a) $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval para $H$;*

*(b) para cada $x, y$ en $X$,*

$$K(x,y) = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}.$$

*Demostración.* (a)⇒(b). Supongamos que $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval. Sean $x, y \in X$. Entonces

$$K_y = \sum_{s\in S} \langle K_y, f_s\rangle f_s = \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s.$$

Luego

$$\begin{aligned} K(x,y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x\rangle &= \left\langle \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, f_s, K_x \right\rangle \\ &= \sum_{s\in S} \overline{f_s(y)}\, \langle f_s, K_x\rangle = \sum_{s\in S} f_s(x)\overline{f_s(y)}. \end{aligned}$$

(b)⇒(a). Supongamos que se cumple la condición (b). Pongamos

$$H_0 \coloneqq \ell(\{K_y\colon\ y \in X\}).$$

Sea $h \in H_0$:

$$h = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{y_j}. \tag{1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \langle K_{y_p}, K_{y_q}\rangle = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} K(y_q, y_p) = \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s\in S} f_s(y_q)\overline{f_s(y_p)} \\ &= \sum_{p,q=1}^{m} \alpha_p \overline{\alpha_q} \sum_{s\in S} \langle f_s, K_{y_q}\rangle \langle K_{y_p}, f_s\rangle = \sum_{s\in S} \left\langle f_s, \sum_{q=1}^{m} \alpha_q K_{y_q} \right\rangle \left\langle \sum_{p=1}^{m} \alpha_p K_{y_p}, f_s \right\rangle \\ &= \sum_{s\in S} \langle f_s, h\rangle\, \langle h, f_s\rangle = \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2. \end{aligned}$$

Definimos $\widetilde{V}\colon H_0 \to \ell^2(S)$. Para cada $h$ en $H_0$, pongamos

$$(\widetilde{V}h)(s) \coloneqq \langle h, f_s \rangle \qquad (s \in S).$$

Hemos mostrado que $\widetilde{V}$ es una isometría. Como $H_0$ es denso en $H$, $\widetilde{V}$ se extiende a una isometría $V\colon H \to \ell^2(S)$. Como las funciones $h \mapsto (Vh)(s)$ y $h \mapsto \langle h, f_s \rangle$ son continuas y coinciden en $H_0$, coinciden en todo $H$. Concluimos que

$$(Vh)(s) = \langle h, f_s \rangle.$$

Por el criterio de marco de Parseval, $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval. $\square$