Un espacio de Sóbolev con núcleo reproductor

Objetivos. Consideramos el espacio vectorial complejo

$$H := \Big\{ f \in \mathrm{AC}([0,1]) \colon \quad f' \in L^2([0,1]),\ f(0) = f(1) = 0 \Big\}, \tag{1}$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_H := \langle f', g' \rangle_{L^2([0,1])}.$$

Vamos a mostrar que H es un EHNR, encontrar su núcleo reproductor y una base ortonormal.

Prerrequisitos. El espacio $\mathrm{AC}([0,1])$ de funciones absolutamente continuas, espacios de Hilbert con núcleo reproductor, la base ortonormal de Fourier en $L^2([0,1])$.

1 Repaso. Consideramos el espacio $L^2([0,1])$ con la medida de Lebesgue μ. Las siguientes funciones se conocen como las funciones básicas de Fourier en $[0,1]$:

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,kx}.$$

Por la teoría de series de Fourier cuadrado sumables, se sabe que la familia $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$.

2 Repaso. Para las funciones absolutamente continuas se cumple la regla de Barrow, conocida también como el segundo teorema fundamental del cálculo. Por supuesto, la integral se entiende como la integral de Lebesgue. Si $f \in \mathrm{AC}([0,1])$, entonces f' existe μ-c.t.p. en $[0,1]$, y para cada x en $[0,1]$

$$f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} f' \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

3 Proposición. *H es un espacio con producto interno.*

Demostración. Se verifica fácilmente. Las condiciones $f', g' \in L^2([0,1])$ garantizan que $\langle f', g' \rangle_{L^2([0,1])}$ está bien definido. □

4 Proposición. *Pongamos*

$$V := \Big\{ g \in L^2([0,1]) \colon \quad g \perp \varphi_0 \Big\}, \quad \textit{esto es,} \quad V = \left\{ g \in L^2([0,1]) \colon \int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\mu = 0 \right\}.$$

Entonces, V es un subespacio cerrado de $L^2([0,1])$. La familia $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ es una base ortonormal de V.

Demostración. Ejercicio. □

5 Proposición. *Sea $f \in H$. Entonces, para cada x en $[0,1]$*

$$f(x) = \int_{[0,x]} f' \, \mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

En particular,

$$\int_{[0,1]} f' \, \mathrm{d}\mu = f(1) = 0.$$

Demostración. Combinamos (2) con la condición $f(0) = 0$. □

6 Proposición. *Definimos $J\colon V \to H$, $D\colon H \to V$,*

$$(Jg)(x) \coloneqq \int_{[0,x]} g \, \mathrm{d}\mu, \qquad (Df)(t) \coloneqq f'(t).$$

Entonces, J y D son isomorfismos isométricos mutualmente inversos.

Demostración. Usamos la definición de H y V y la Proposición 5.

Si $g \in V$, entonces $Jg \in H$ y por el primer teorema fundamental del cálculo $DJg = g$.

Si $f \in H$, entonces por la Proposición 5 tenemos que $Df \in V$ y $JDf = f$.

Por la definición del producto interno en H, el operador D es isométrico. □

7 Definición. Para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, definimos

$$\psi_k(x) \coloneqq \frac{1}{2\pi k}(\varphi_k - 1).$$

8 Proposición. *H es un espacio de Hilbert. La familia $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de H.*

Demostración. Notamos que $D\psi_k = \mathrm{i}\,\varphi_k$. Por lo tanto, $\psi_k = \mathrm{i}\, J\varphi_k$. Se sabe que los isomorfismos isométricos de espacios de Hilbert convierten bases ortonormales en bases ortonormales. □

9 Definición. Definimos $K\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$,

$$K(x,y) \coloneqq \begin{cases} x(1-y), & 0 \le x \le y \le 1, \\ y(1-x), & 0 \le y < x \le 1. \end{cases}$$

Para cada y en $[0,1]$, definimos K_y mediante la regla $K_y(x) \coloneqq K(x,y)$.

10 Proposición. *H es un EHNR, y K es el núcleo reproductor de H.*

Demostración. Sea $y \in [0,1]$. Notemos que

$$K_y(x) = (1-y)\,\mathbf{1}_{[0,y]}(x)x + y\,\mathbf{1}_{[y,1]}(x)\,(1-x).$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente igualdad (c.t.p.):

$$K_y' = (1-y)\,\mathbf{1}_{[0,y]} - y\,\mathbf{1}_{[y,1]}.$$

En particular, K_y' es una función simple medible acotada en $[0,1]$, y $K_y \in H$. Ahora es fácil verificar la propiedad reproductora. Si $f \in H$,

$$\begin{aligned}\langle f, K_y\rangle_H = \langle f', K_y'\rangle_{L^2} &= \int_{[0,y]} (1-y) f' \,\mathrm{d}\mu + \int_{[y,1]} (-y) f'(x)\,\mathrm{d}\mu \\ &= (1-y)(f(y)-f(0)) - y(f(1)-f(y)) = f(y).\end{aligned}$$

□

11 Observación. Para cada k en $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, ambas funciones ψ_k y ψ_{-k} satisfacen la misma ecuación diferencial

$$f'' = -(2\pi k)^2 f.$$

En otras palabras, ψ_k y ψ_{-k} son dos funciones propias del operador D^2, asociadas al valor propio $-(2\pi k)^2$. Notemos que para cada k en $\mathbb{N}$ el espacio de soluciones (el subespacio propio) es de dimensión 2, y el espacio H es la suma ortogonal de estos subespacios.